Università degli studi di Genova
Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Tesi di Laurea in Fisica

Nuove simmetrie per campi di spin intero

Relatore:
Prof. Giuseppe Bandelloni

Correlatore:
Prof. Nicola Maggiore

Candidato:
Alberto Tacchella

Anno Accademico 2004/2005

...utinam intelligere possim rationacinationes pulcherrimas quae e propositione concisa DE QUADRATUM NIHILO EXAEQUARI fluunt.

(...se solo potessi capire le meravigliose conseguenze che seguono dalla concisa proposizione "$\mathrm{d}^2 = 0$".)

Henri Cartan

Indice

Introduzione

Uno dei problemi aperti da più tempo nella teoria quantistica dei campi (QFT) è quello di trovare una formulazione consistente per la dinamica e le interazioni dei campi di spin alto (*higher spin*): con questa espressione vengono tradizionalmente indicati in letteratura i campi quanto-relativistici costruiti partendo dalle rappresentazioni del gruppo di Poincaré caratterizzate da uno spin $s > 1$. A partire dagli articoli pionieristici di Dirac [12], Fierz e Pauli [15] e Rarita e Schwinger [26], i campi di spin alto sono stati oggetto di indagini sempre più approfondite che è impossibile riassumere in questa sede: ci accontenteremo pertanto di dare un breve cenno delle direzioni più significative.

Inizialmente l'interesse si è concentrato principalmente sul caso $s = 2$, per via della sua rilevanza ai fini della costruzione di una teoria quantistica della gravità; fondamentale a questo riguardo è un lavoro di Gupta del 1954 [22], in cui si introduce l'idea che la dinamica classica individuata dalle equazioni di campo di Einstein si possa ricostruire in un modello quantistico a partire dalle (auto)interazioni di un campo di spin 2 a massa nulla su uno spazio-tempo piatto. Qualche anno dopo Fang e Fronsdal [14] suggeriranno che tale modo di procedere ("Gupta programme") possa individuare l'unica estensione quantistica consistente della relatività generale.

Successivamente si è ridestato l'interesse per il caso $s = 3/2$ grazie all'introduzione della supergravità [10,20], che forniva per la prima volta un modello con interazioni consistenti per un campo di spin 3/2 a massa nulla.

In tempi più recenti è emersa in maniera nitida dallo studio della teoria delle stringhe (nelle sue varie versioni) l'esigenza di disporre di una teoria quantistica di campo capace di descrivere sullo stesso piano la dinamica di campi aventi spin arbitrariamente alto (tale teoria dovrebbe costituire il limite a basse energie delle costruzioni corrispondenti nei modelli di stringa): l'attività di ricerca sulla teoria dei campi di *higher spin* ha ricevuto da ciò un ulteriore impulso.

In relazione a quest'ultimo approccio, è da notare come l'interesse si sia concentrato principalmente sul caso *a massa nulla*; risultati molto generali di teoria dei campi mostrano infatti come le teorie massive di campi aventi spin $s \geq 1$ interagenti siano necessariamente *non rinormalizzabili*, a meno che la loro massa sia il risultato di una rottura spontanea della simmetria di gauge associata ad un corrispondente campo a massa nulla. Un meccanismo di questo tipo è proprio quello che si pensa agisca nelle teorie di stringa.

Da quanto detto fin qui è quindi evidente l'importanza di costruire una teoria di campo in grado di descrivere la dinamica di campi interagenti di spin arbitrariamente alto. Nel caso libero, una lagrangiana per campi massivi di spin s qualunque (sulla base dei vincoli stabiliti già nel 1939 da Fierz e Pauli in [15]) è stata costruita nel 1974 da Singh e Hagen [29, 30]. Il corrispondente limite a massa nulla è stato studiato da Fronsdal [21] nel caso di spin intero e da Fang e Fronsdal [13] nel caso semidispari. In particolare in [21] l'autore propone una teoria in cui i campi a massa nulla di spin s sono soggetti a una simmetria di gauge locale ottenuta generalizzando le ben note simmetrie di cui godono le teorie dei campi di spin $s = 1$ e $s = 2$.

Nel caso $s = 1$ si ha a che fare ovviamente con l'elettrodinamica quantistica (QED), ovvero la teoria quantistica di campo più vecchia e di maggiore successo mai costruita. Essa si configura come una teoria di gauge locale basata sul gruppo interno $U(1)$, in cui le trasformazioni dei campi assumono la forma

$$\delta A_\mu(x) = \partial_\mu \xi(x) \tag{1}$$

Nel caso $s = 2$, seguendo la strada tracciata da Fierz-Pauli e Gupta, la teoria che si è presa in considerazione è la relatività generale linearizzata, invariante sotto le trasformazioni di Killing conformi

$$\delta g_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu \xi_\nu(x) + \partial_\nu \xi_\mu(x) \tag{2}$$

Come generalizzazione delle (1)–(2) al caso $s > 2$, Fronsdal propone le seguenti trasformazioni:

$$\delta \phi_{\mu_1 \ldots \mu_s}(x) = \delta^{\nu_1 \ldots \nu_s}_{\mu_1 \ldots \mu_s} \partial_{\nu_1} \xi_{\nu_2 \ldots \nu_s}(x) \tag{3}$$

dove $\delta^{\nu_1 \ldots \nu_s}_{\mu_1 \ldots \mu_s}$ è la δ di Kronecker a s indici simmetrizzata (cfr. Notazioni più avanti). La simmetria di gauge così ottenuta, pilotata dai campi di rango $s-1$ $\xi_{\nu_1 \ldots \nu_{s-1}}$, è evidentemente abeliana:

$$\delta \xi_{\nu_1 \ldots \nu_{s-1}}(x) = 0$$

La geometria che sottostà a queste trasformazioni è stata studiata da de Wit e Freedman [9]; più recentemente Sagnotti e collaboratori [16–18, 27, 28] hanno evidenziato che questo approccio soffre di problemi di non-località già al livello della teoria libera. Si ha dunque la sensazione che la strada seguita finora non abbia ancora portato a una reale comprensione delle questioni in gioco.

Nel mio lavoro di tesi presento un approccio alternativo che riguarda una teoria di campo per oggetti a massa nulla di spin *intero* arbitrariamente alto, rappresentati da campi tensoriali *completamente simmetrici* $A^{\mu_1 \ldots \mu_s}(x)$ definiti su uno spazio-tempo generico (non necessariamente piatto). Lo scopo è quello di arrivare alla costruzione di un modello in cui i campi suddetti siano soggetti a una simmetria di gauge locale *diversa* dalla (3) (in particolare non abeliana), associata a un'opportuna generalizzazione del gruppo dei diffeomorfismi dello spazio-tempo. L'idea che stà dietro a questa scelta è da un lato quella di recuperare, a un determinato livello, il contesto proprio della relatività generale come teoria invariante per diffeomorfismi e dall'altro quella di estendere in maniera non banale tale invarianza al livello della teoria quantistica.

Il lavoro è organizzato nella maniera seguente:

- Nel **capitolo 1**, di carattere eminentemente tecnico, presento la costruzione geometrica da cui hanno origine i campi e l'algebra del gruppo di gauge. A tale scopo vengono impiegate tecniche di geometria simplettica provenienti dal campo delle *algebre estese* (o di Zamolodchikov) derivate da simplectomorfismi su varietà di Riemann bidimensionali [3]. Tale tecnica viene qui estesa per la prima volta su spazi di dimensione arbitraria; l'introduzione di elementi non tensoriali viene evitata tramite l'espediente di prendere una sezione "orizzontale" dell'algebra.

  Il punto di vista adottato si basa sulla tecnica BRS, la cui origine geometrica viene sfruttata appieno: i campi di spin alto e i ghost BRS nascono infatti in maniera naturale dal substrato geometrico sopra delineato. Si trova che le leggi di trasformazione dei campi di materia sono regolate da campi ghost di rango finito e arbitrariamente alto; l'algebra associata ai campi di rango 1 coincide con l'algebra delle trasformazioni di coordinate sullo spazio-tempo.

- Nel **capitolo 2** chiarisco la natura dell'algebra emersa dalla costruzione del capitolo precedente studiando in dettaglio le leggi di trasformazione dei campi di materia e dei ghost. In conseguenza di questa analisi introduco sulla varietà spazio-temporale delle nuove connessioni $\Gamma^{\mu_1\cdots\mu_i}_{\nu\rho}(x)$, che generalizzano le usuali connessioni della geometria differenziale classica, associate ai ghost di rango maggiore di 1. Ne segue l'introduzione di nuovi tensori di curvatura di rango superiore che generalizzano il tensore di Riemann.

- Nel **capitolo 3** passo allo studio della co-omologia dell'operatore BRS associato alla simmetria sopra costruita sullo spazio delle funzioni locali dei campi, e trovo che la soluzione generale fa intervenire unicamente i ghost e le connessioni di rango 1, riducendosi pertanto al caso ben noto [4] della co-omologia associata al gruppo dei diffeomorfismi. Il risultato che trovo è dunque che eventuali anomalie di una teoria quantistica che si basi sul gruppo di simmetria costruito sono localizzate solamente al livello più basso, quello dell'algebra locale dei diffeomorfismi, mentre per tutte le simmetrie di livello superiore si ottengono identità di Ward che dal limite classico mantengono la loro validità anche nella corrispondente teoria quantistica.

- Infine, nel **capitolo 4** calcolo la co-omologia modulo d dell'operatore BRS nello spazio dei funzionali locali basandomi sui risultati del capitolo precedente e determino una possibile azione classica per una teoria di campo basata su tale simmetria come il generico elemento di carica zero di tale coomologia. A tale scopo si rivela necessario introdurre dei campi a più indici che svolgano un ruolo analogo a una metrica attribuendo loro lo status di *densità tensoriali*, in modo tale da ottenere una teoria analoga alla versione di Weyl dell'azione di Einstein-Hilbert per la relatività generale.

Notazioni

In tutto il lavoro si adotta la convenzione di somma sugli indici ripetuti: davanti a tutti i monomi in cui figura uno stesso indice sia in posizione alta che in posizione bassa si sottintende una sommatoria su tale indice. Tutti gli indici greci (μ, ν, α, ecc.) correranno sempre da 1 a n (dimensione della varietà spazio-temporale M).

I delta di Kronecker sono definiti come segue:

$$\delta^\mu_\nu := \begin{cases} 1 & \text{se } \mu = \nu \\ 0 & \text{se } \mu \neq \nu \end{cases} \tag{4}$$

$$\delta^{\mu_1 \dots \mu_n}_{\rho_1 \dots \rho_n} := \frac{1}{n!} \sum_{s \in S_n} \delta^{\mu_1}_{\rho_{s(1)}} \dots \delta^{\mu_n}_{\rho_{s(n)}} \tag{5}$$

dove S_n è il gruppo delle permutazioni di n oggetti.

Gli operatori di derivazione si intenderanno agire solo sull'espressione immediatamente alla loro destra: così ad esempio $\partial_\mu A_\nu B_\rho = (\partial_\mu A_\nu) B_\rho$. In caso contrario si adotteranno delle parentesi: $\partial_\mu (A_\nu B_\rho)$.

Per indicare il commutatore e l'anticommutatore dei due operatori A e B si useranno le notazioni seguenti:

$$[A, B] := AB - BA \tag{6}$$

$$\{A, B\} := AB + BA \tag{7}$$

Capitolo 1

Origine della simmetria

1.1 Simplectomorfismi

Sia M una varietà differenziabile n-dimensionale di classe C^∞ priva di bordo e sia $\{x^1, \ldots, x^n\}$ un generico sistema di coordinate locali su M. Consideriamo poi il *fibrato cotangente* $T^*(M)$ associato a M, che denotiamo d'ora in poi semplicemente con S, e il generico sistema di coordinate fibrato indotto su di esso dalle x^μ, che indichiamo con $\{x^1, \ldots, x^n, y_1, \ldots, y_n\}$ o più sinteticamente con (x, y). Com'è noto (si vedano ad esempio [8, 19]), su S rimane automaticamente definita una struttura simplettica determinata dalla 1-forma di Liouville θ, la cui espressione in un qualunque sistema di coordinate fibrato è

$$\theta = y_\mu \, \mathrm{d}x^\mu \tag{1.1}$$

Differenziando θ si ottiene la 2-forma canonica

$$\Omega = \mathrm{d}\theta = \mathrm{d}y_\mu \wedge \mathrm{d}x^\mu \tag{1.2}$$

È facile verificare che Ω è chiusa e non degenere, e pertanto definisce una struttura simplettica su S.

Consideriamo ora un secondo sistema di coordinate fibrato su S, che denotiamo con $\{X^1, \ldots, X^n, Y_1, \ldots, Y_n\}$ o più brevemente (X, Y), legato a (x, y) dalle leggi di trasformazione (differenziabili)

$$\begin{cases} X^\alpha = X^\alpha(x^1, \ldots, x^n, y_1, \ldots, y_n) \\ Y_\alpha = Y_\alpha(x^1, \ldots, x^n, y_1, \ldots, y_n) \end{cases} \tag{1.3}$$

Le (1.3) definiscono un **diffeomorfismo simplettico** (o **simplectomorfismo**, o **trasformazione canonica**) su S. In tutto ciò che segue supporremo sistematicamente non solo che lo jacobiano della trasformazione complessiva (1.3) sia non nullo (il che è implicito nella richiesta che (X, Y) sia un sistema di coordinate), ma anche che siano diversi da zero gli jacobiani “parziali”

$$\left|\frac{\partial(X^1,\ldots,X^n)}{\partial(x^1,\ldots,x^n)}\right| \neq 0 \quad \text{e} \quad \left|\frac{\partial(Y_1,\ldots,Y_n)}{\partial(y_1,\ldots,y_n)}\right| \neq 0$$

In altre parole, su S possiamo usare uno qualunque tra i 4 diversi sistemi di coordinate dati da (x, y), (X, Y), (x, Y) e (y, X).

In particolare mettiamoci nel sistema (x, Y), usiamo cioè le coordinate del “vecchio” sistema sulla varietà di base M e le coordinate del “nuovo” sistema sulle fibre. Le y_μ e le X^α vanno quindi interpretate come $2n$ *funzioni* definite su S:

$$\begin{cases} y_\mu = y_\mu(x^1,\ldots,x^n,Y_1,\ldots,Y_n) \\ X^\alpha = X^\alpha(x^1,\ldots,x^n,Y_1,\ldots,Y_n) \end{cases} \tag{1.4}$$

In particolare le y_μ si possono pensare come una famiglia di *sezioni locali* del fibrato cotangente S parametrizzate dalle Y_α.

Naturalmente il fatto che la trasformazione (1.3) sia un simplectomorfismo impone dei vincoli sulle y_μ e sulle X^α. La richiesta è che la 2-forma canonica Ω sia preservata dalle (1.3):

$$\Omega(x, y(x, Y)) = \Omega(X(x, Y), Y)$$

ovvero, ricordando la (1.2):

$$\mathrm{d}y_\mu(x, Y) \wedge \mathrm{d}x^\mu = \mathrm{d}Y_\alpha \wedge \mathrm{d}X^\alpha(x, Y) \tag{1.5}$$

Il differenziale esterno d su S, nelle coordinate scelte, si scrive

$$\mathrm{d} = \mathrm{d}x^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \mathrm{d}Y_\alpha \frac{\partial}{\partial Y_\alpha} \tag{1.6}$$

e utilizzando tale espressione nella (1.5) si ottiene l’uguaglianza

$$\begin{aligned} &\frac{\partial y_\mu(x,Y)}{\partial x^\nu}\,\mathrm{d}x^\nu \wedge \mathrm{d}x^\mu + \frac{\partial y_\mu(x,Y)}{\partial Y_\alpha}\,\mathrm{d}Y_\alpha \wedge \mathrm{d}x^\mu = \\ &\qquad = \frac{\partial X^\alpha(x,Y)}{\partial x^\mu}\,\mathrm{d}Y_\alpha \wedge \mathrm{d}x^\mu + \frac{\partial X^\alpha(x,Y)}{\partial Y_\beta}\,\mathrm{d}Y_\alpha \wedge \mathrm{d}Y_\beta \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y_\mu(x,Y)}{\partial x^\nu}\,\mathrm{d}x^\nu \wedge \mathrm{d}x^\mu = 0 \\ \dfrac{\partial X^\alpha(x,Y)}{\partial Y_\beta}\,\mathrm{d}Y_\alpha \wedge \mathrm{d}Y_\beta = 0 \\ \left(\dfrac{\partial y_\mu(x,Y)}{\partial Y_\alpha} - \dfrac{\partial X^\alpha(x,Y)}{\partial x^\mu}\right)\mathrm{d}Y_\alpha \wedge \mathrm{d}x^\mu = 0 \end{cases} \tag{1.7}$$

Di queste tre uguaglianze, le prime due esprimono semplicemente il fatto che le quantità $\partial y_\mu / \partial x^\nu$ e $\partial X^\alpha / \partial Y_\beta$ sono *simmetriche* nei due indici liberi, dato che si annullano se saturate con un'espressione antisimmetrica, mentre la terza impone che il termine tra parentesi sia identicamente nullo. In definitiva si hanno dunque le seguenti **condizioni di integrabilità**:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y_\mu}{\partial x^\nu} = \dfrac{\partial y_\nu}{\partial x^\mu} \\ \dfrac{\partial X^\alpha}{\partial Y_\beta} = \dfrac{\partial X^\beta}{\partial Y_\alpha} \\ \dfrac{\partial y_\mu}{\partial Y_\alpha} = \dfrac{\partial X^\alpha}{\partial x^\mu} \end{cases} \tag{1.8}$$

che esprimono $\frac{1}{2}n(n-1) + \frac{1}{2}n(n-1) + n^2 = 2n^2 - n$ vincoli sulle $4n^2$ derivate parziali delle funzioni $X^\alpha(x, Y)$ e $y_\mu(x, Y)$.

Possiamo enunciare le uguaglianze trovate in maniera più sintetica dando un nome alle matrici jacobiane parziali di X^α e y_μ, per esempio nella maniera seguente:

$$\begin{aligned} \Psi_{\mu\nu}(x, Y) &:= \frac{\partial y_\mu(x, Y)}{\partial x^\nu}, \quad & \Phi^{\alpha\beta}(x, Y) &:= \frac{\partial X^\alpha(x, Y)}{\partial Y_\beta} \\ \Xi^\alpha{}_\mu(x, Y) &:= \frac{\partial X^\alpha(x, Y)}{\partial x^\mu}, \quad & \Upsilon_\mu{}^\alpha(x, Y) &:= \frac{\partial y_\mu(x, Y)}{\partial Y_\alpha} \end{aligned} \tag{1.9}$$

Le (1.8) diventano allora semplicemente

$$\Psi_{\mu\nu}(x, Y) = \Psi_{\nu\mu}(x, Y) \qquad \Phi^{\alpha\beta}(x, Y) = \Phi^{\beta\alpha}(x, Y) \qquad \Xi^\alpha{}_\mu(x, Y) = \Upsilon_\mu{}^\alpha(x, Y) \tag{1.10}$$

Le condizioni di integrabilità portano a delle relazioni non banali tra le basi indotte dai sistemi di coordinate (x, Y) e (X, y) nei fibrati tensoriali definiti su S. Per esempio, il sistema di coordinate (x, Y) induce sulle fibre di $T^*(S)$ la base $\{\mathrm{d}x^\mu, \mathrm{d}Y_\alpha\}$ sulla quale i differenziali delle (1.4) si esprimeranno, in tutta generalità, come

$$\begin{aligned} \mathrm{d}y_\mu &= \frac{\partial y_\mu(x, Y)}{\partial x^\nu}\,\mathrm{d}x^\nu + \frac{\partial y_\mu(x, Y)}{\partial Y_\beta}\,\mathrm{d}Y_\beta \\ \mathrm{d}X^\alpha &= \frac{\partial X^\alpha(x, Y)}{\partial x^\nu}\,\mathrm{d}x^\nu + \frac{\partial X^\alpha(x, Y)}{\partial Y_\beta}\,\mathrm{d}Y_\beta \end{aligned}$$

Le condizioni di integrabilità (1.8) ci dicono allora che le relazioni precedenti si possono riscrivere come segue:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}y_\mu &= \frac{\partial y_\nu(x, Y)}{\partial x^\mu}\,\mathrm{d}x^\nu + \frac{\partial X^\beta(x, Y)}{\partial x^\mu}\,\mathrm{d}Y_\beta \\ \mathrm{d}X^\alpha &= \frac{\partial y_\nu(x, Y)}{\partial Y_\alpha}\,\mathrm{d}x^\nu + \frac{\partial X^\beta(x, Y)}{\partial Y_\alpha}\,\mathrm{d}Y_\beta \end{aligned} \tag{1.11}$$

Similmente se consideriamo il sistema di coordinate (y, X) su S abbiamo che esso induce sulle fibre di $T(S)$ una base data dai $2n$ campi vettoriali $\{\frac{\partial}{\partial y_\nu}, \frac{\partial}{\partial X^\beta}\}$. Sviluppando i campi $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ e $\frac{\partial}{\partial Y_\alpha}$ su tale base si ottiene, di nuovo in tutta generalità:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x^\mu} &= \frac{\partial y_\nu(x,Y)}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial y_\nu} + \frac{\partial X^\beta(x,Y)}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial X^\beta}\\ \frac{\partial}{\partial Y_\alpha} &= \frac{\partial y_\nu(x,Y)}{\partial Y_\alpha}\frac{\partial}{\partial y_\nu} + \frac{\partial X^\beta(x,Y)}{\partial Y_\alpha}\frac{\partial}{\partial X^\beta}\end{aligned}$$

e usando le (1.8):

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x^\mu} &= \frac{\partial y_\mu(x,Y)}{\partial x^\nu}\frac{\partial}{\partial y_\nu} + \frac{\partial y_\mu(x,Y)}{\partial Y_\beta}\frac{\partial}{\partial X^\beta}\\ \frac{\partial}{\partial Y_\alpha} &= \frac{\partial X^\alpha(x,Y)}{\partial x^\nu}\frac{\partial}{\partial y_\nu} + \frac{\partial X^\alpha(x,Y)}{\partial Y_\beta}\frac{\partial}{\partial X^\beta}\end{aligned} \tag{1.12}$$

Con le abbreviazioni introdotte nella (1.9), le (1.11)–(1.12) si scrivono

$$\begin{aligned}\mathrm{d}y_\mu &= \Psi_{\nu\mu}(x,Y)\,\mathrm{d}x^\nu + \Xi^\beta{}_\mu(x,Y)\,\mathrm{d}Y_\beta\\ \mathrm{d}X^\alpha &= \Upsilon_\nu{}^\alpha(x,Y)\,\mathrm{d}x^\nu + \Phi^{\beta\alpha}(x,Y)\,\mathrm{d}Y_\beta\end{aligned} \tag{1.13}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x^\mu} &= \Psi_{\mu\nu}(x,Y)\frac{\partial}{\partial y_\nu} + \Upsilon_\mu{}^\beta(x,Y)\frac{\partial}{\partial X^\beta}\\ \frac{\partial}{\partial Y_\alpha} &= \Xi^\alpha{}_\nu(x,Y)\frac{\partial}{\partial y_\nu} + \Phi^{\alpha\beta}(x,Y)\frac{\partial}{\partial X^\beta}\end{aligned} \tag{1.14}$$

rispettivamente.

Per uso successivo, sarà utile calcolare il commutatore

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^\rho}, \frac{\partial}{\partial y_\mu}\right]$$

Cominciamo col notare che

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial Y_\alpha}\right] = 0 \qquad \text{e} \qquad \left[\frac{\partial}{\partial X^\alpha}, \frac{\partial}{\partial y_\mu}\right] = 0$$

dato che le basi $\{\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial Y_\alpha}\}$ e $\{\frac{\partial}{\partial y_\nu}, \frac{\partial}{\partial X^\beta}\}$ di $T(S)$ sono olonome per costruzione. Per ricavare il commutatore richiesto possiamo notare ad esempio che

$$\begin{aligned}0 = \left[\frac{\partial}{\partial x^\rho}, \frac{\partial}{\partial Y_\alpha}\right] &= \left[\frac{\partial}{\partial x^\rho}, \Xi^\alpha{}_\mu\frac{\partial}{\partial y_\mu} + \Phi^{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial X^\beta}\right] =\\ &= \frac{\partial \Xi^\alpha{}_\mu}{\partial x^\rho}\frac{\partial}{\partial y_\mu} + \Xi^\alpha{}_\mu\left[\frac{\partial}{\partial x^\rho}, \frac{\partial}{\partial y_\mu}\right] + \frac{\partial \Phi^{\alpha\beta}}{\partial x^\rho}\frac{\partial}{\partial X^\beta} + \Phi^{\alpha\beta}\left[\frac{\partial}{\partial x^\rho}, \frac{\partial}{\partial X^\beta}\right]\end{aligned} \tag{1.15}$$

e similmente

$$0 = \left[\frac{\partial}{\partial x^\rho}, \frac{\partial}{\partial x^\nu}\right] = \left[\frac{\partial}{\partial x^\rho}, \Psi_{\nu\mu}\frac{\partial}{\partial y_\mu} + \Xi^\beta{}_\nu \frac{\partial}{\partial X^\beta}\right] =$$
$$= \frac{\partial \Psi_{\nu\mu}}{\partial x^\rho}\frac{\partial}{\partial y_\mu} + \Psi_{\nu\mu}\left[\frac{\partial}{\partial x^\rho}, \frac{\partial}{\partial y_\mu}\right] + \frac{\partial \Xi^\beta{}_\nu}{\partial x^\rho}\frac{\partial}{\partial X^\beta} + \Xi^\beta{}_\nu\left[\frac{\partial}{\partial x^\rho}, \frac{\partial}{\partial X^\beta}\right] \tag{1.16}$$

Dalla (1.15) si ottiene che

$$\Phi^{\alpha\beta}\left[\frac{\partial}{\partial x^\rho}, \frac{\partial}{\partial X^\beta}\right] = -\frac{\partial \Phi^{\alpha\beta}}{\partial x^\rho}\frac{\partial}{\partial X^\beta} - \frac{\partial \Xi^\alpha{}_\mu}{\partial x^\rho}\frac{\partial}{\partial y_\mu} - \Xi^\alpha{}_\mu\left[\frac{\partial}{\partial x^\rho}, \frac{\partial}{\partial y_\mu}\right]$$

ovvero

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^\rho}, \frac{\partial}{\partial X^\gamma}\right] = -(\Phi^{-1})_{\gamma\alpha}\left(\frac{\partial \Phi^{\alpha\beta}}{\partial x^\rho}\frac{\partial}{\partial X^\beta} + \frac{\partial \Xi^\alpha{}_\mu}{\partial x^\rho}\frac{\partial}{\partial y_\mu} + \Xi^\alpha{}_\mu\left[\frac{\partial}{\partial x^\rho}, \frac{\partial}{\partial y_\mu}\right]\right)$$

e sostituendo questa espressione nella (1.16):

$$\frac{\partial \Psi_{\nu\mu}}{\partial x^\rho}\frac{\partial}{\partial y_\mu} + \Psi_{\nu\mu}\left[\frac{\partial}{\partial x^\rho}, \frac{\partial}{\partial y_\mu}\right] + \frac{\partial \Xi^\beta{}_\nu}{\partial x^\rho}\frac{\partial}{\partial X^\beta} +$$
$$- \Xi^\gamma{}_\nu(\Phi^{-1})_{\gamma\alpha}\left(\frac{\partial \Phi^{\alpha\beta}}{\partial x^\rho}\frac{\partial}{\partial X^\beta} + \frac{\partial \Xi^\alpha{}_\mu}{\partial x^\rho}\frac{\partial}{\partial y_\mu} + \Xi^\alpha{}_\mu\left[\frac{\partial}{\partial x^\rho}, \frac{\partial}{\partial y_\mu}\right]\right) = 0$$

da cui, riordinando i vari addendi:

$$\left(\Psi_{\nu\mu} - \Xi^\gamma{}_\nu(\Phi^{-1})_{\gamma\alpha}\Xi^\alpha{}_\mu\right)\left[\frac{\partial}{\partial x^\rho}, \frac{\partial}{\partial y_\mu}\right] = \left(\Xi^\gamma{}_\nu(\Phi^{-1})_{\gamma\alpha}\frac{\partial \Phi^{\alpha\beta}}{\partial x^\rho} - \frac{\partial \Xi^\beta{}_\nu}{\partial x^\rho}\right)\frac{\partial}{\partial X^\beta} +$$
$$+ \left(\Xi^\gamma{}_\nu(\Phi^{-1})_{\gamma\alpha}\frac{\partial \Xi^\alpha{}_\mu}{\partial x^\rho} - \frac{\partial \Psi_{\nu\mu}}{\partial x^\rho}\right)\frac{\partial}{\partial y_\mu}$$

A questo punto basta invertire la matrice (certamente non singolare) che figura a primo membro per ottenere il risultato cercato che, introdotte delle opportune abbreviazioni, possiamo riassumere formulando la seguente:

Proposizione 1.1. *Risulta*

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^\rho}, \frac{\partial}{\partial y_\sigma}\right] = Z^{\sigma\beta}_\rho(x,Y)\frac{\partial}{\partial X^\beta} + T^\sigma_{\rho\mu}(x,Y)\frac{\partial}{\partial y_\mu} \tag{1.17}$$

È evidente a posteriori che la (1.17) non è altro che l'espressione del commutatore $\left[\frac{\partial}{\partial x^\rho}, \frac{\partial}{\partial y_\sigma}\right]$ sulla base di $T(S)$ introdotta in precedenza.

1.2 Funzione generatrice

Un altro modo per esprimere il fatto che la trasformazione (1.3) lascia inalterata la 2-forma canonica Ω è richiedere che essa preservi la 1-forma di Liouville (1.1) a meno di un differenziale esatto:

$$\theta(x, y) = \theta(X, Y) + \mathrm{d}F(x, X)$$

Ciò è conseguenza immediata della proprietà $\mathrm{d}^2 = 0$. Resta così definita (localmente) una funzione F nelle $2n$ coordinate (x, X) detta la **funzione generatrice** del simplectomorfismo considerato.

Per passare al sistema di coordinate (x, Y) è necessario operare su F una trasformata di Legendre parziale rispetto alle X^α; si ottiene così una nuova funzione generatrice Φ nelle variabili desiderate:

$$\Phi(x, Y) := F(x, X) + Y_\alpha X^\alpha(x, Y)$$

Proposizione 1.2. *La conoscenza della funzione generatrice* $\Phi(x, Y)$ *determina univocamente le funzioni* (1.4).

Dimostrazione. Si ha:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\Phi(x, Y) &= \mathrm{d}(F(x, X) + Y_\alpha X^\alpha(x, Y)) \\
&= y_\mu(x, Y)\,\mathrm{d}x^\mu - Y_\alpha\,\mathrm{d}X^\alpha(x, Y) + \mathrm{d}Y_\alpha X^\alpha(x, Y) + Y_\alpha\,\mathrm{d}X^\alpha(x, Y) \\
&= y_\mu(x, Y)\,\mathrm{d}x^\mu + X^\alpha(x, Y)\,\mathrm{d}Y_\alpha
\end{aligned}$$

da cui si ottengono le fondamentali relazioni

$$\begin{aligned}
y_\mu(x, Y) &= \frac{\partial\Phi(x, Y)}{\partial x^\mu} \\
X^\alpha(x, Y) &= \frac{\partial\Phi(x, Y)}{\partial Y_\alpha}
\end{aligned} \tag{1.18}$$

che mostrano come le y_μ e le X^α non siano altro che i "gradienti" della funzione scalare Φ rispetto al sistema di coordinate scelto. □

Questo risultato evidenzia come il requisito di invarianza della 2-forma Ω sia una condizione estremamente restrittiva imposta sui possibili cambi di coordinate in S: infatti mentre il generico diffeomorfismo (non necessariamente canonico) su S è individuato dalla scelta di $2n$ funzioni differenziabili indipendenti (aventi jacobiano non nullo rispetto alle vecchie coordinate), un diffeomorfismo simplettico è completamente determinato da una *singola funzione differenziabile* (a hessiano non nullo) per mezzo delle relazioni (1.18).

In questo contesto, le uguaglianze che avevamo chiamato "condizioni di integrabilità" si recuperano immediatamente imponendo che sia $\mathrm{d}^2\Phi(x, Y) = 0$ e scrivendo $\mathrm{d} = \mathrm{d}_x + \mathrm{d}_Y$:

$$\mathrm{d}^2\Phi(x, Y) = (\mathrm{d}_x + \mathrm{d}_Y)^2\Phi(x, Y) = (\mathrm{d}_x^2 + \mathrm{d}_x\,\mathrm{d}_Y + \mathrm{d}_Y\,\mathrm{d}_x + \mathrm{d}_Y^2)\Phi(x, Y) = 0$$

da cui

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\Phi(x,Y)}{\partial x^\nu \partial x^\mu}\,\mathrm{d}x^\nu \wedge \mathrm{d}x^\mu = 0 \\ \dfrac{\partial^2\Phi(x,Y)}{\partial Y_\beta \partial Y_\alpha}\,\mathrm{d}Y_\beta \wedge \mathrm{d}Y_\alpha = 0 \\ \dfrac{\partial^2\Phi(x,Y)}{\partial x^\mu \partial Y_\alpha}\,\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}Y_\alpha + \dfrac{\partial^2\Phi(x,Y)}{\partial Y_\alpha \partial x^\mu}\,\mathrm{d}Y_\alpha \wedge \mathrm{d}x^\mu = 0 \end{cases}$$

che, viste le (1.18), sono proprio le (1.7).

Notiamo che a secondo membro delle (1.18) figurano gli operatori di derivazione $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ e $\frac{\partial}{\partial Y_\alpha}$; nel §1.1 abbiamo visto che tali operatori si possono esprimere in funzione di $\frac{\partial}{\partial y_\nu}$ e $\frac{\partial}{\partial X^\beta}$ tramite le formule (1.12). Utilizzando tali espressioni nella (1.18) si ottiene

$$\begin{aligned} y_\mu &= \frac{\partial y_\mu(x,Y)}{\partial x^\nu}\frac{\partial\Phi(x,Y)}{\partial y_\nu} + \frac{\partial y_\mu(x,Y)}{\partial Y_\beta}\frac{\partial\Phi(x,Y)}{\partial X^\beta} \\ X^\alpha &= \frac{\partial X^\alpha(x,Y)}{\partial x^\nu}\frac{\partial\Phi(x,Y)}{\partial y_\nu} + \frac{\partial X^\alpha(x,Y)}{\partial Y_\beta}\frac{\partial\Phi(x,Y)}{\partial X^\beta} \end{aligned} \tag{1.19}$$

Occorre tenere ben presente che le derivate $\frac{\partial}{\partial y_\nu}$ e $\frac{\partial}{\partial X^\beta}$ qui agiscono su una funzione delle coordinate (x,Y), e pertanto vanno intese in senso implicito. Infatti, è evidente dalla costruzione effettuata che la funzione generatrice Φ, pur dipendendo in maniera *esplicita* dalle coordinate (x,Y), dipende in maniera *implicita* dalle y_μ e dalle X^α:

$$\Phi(x,Y) = \Phi(y_\mu(x,Y), X^\alpha(x,Y))$$

Gli operatori $\frac{\partial}{\partial y_\nu}$ e $\frac{\partial}{\partial X^\beta}$ vanno quindi intesi come derivazioni "implicite", che agiscono ancora sulle funzioni delle coordinate (x,Y), definiti ad esempio nella maniera seguente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y_\mu} &= (\Psi^{-1})^{\nu\mu}(x,Y)\frac{\partial}{\partial x^\nu} + (\Upsilon^{-1})_\alpha{}^\mu(x,Y)\frac{\partial}{\partial Y_\alpha} \\ \frac{\partial}{\partial X^\alpha} &= (\Xi^{-1})^\nu{}_\alpha(x,Y)\frac{\partial}{\partial x^\nu} + (\Phi^{-1})_{\beta\alpha}(x,Y)\frac{\partial}{\partial Y_\beta} \end{aligned}$$

in cui si sono chiamate in causa esplicitamente le inverse delle matrici jacobiane parziali (1.9).

Se ora definiamo due nuove famiglie di campi

$$A^\mu(x,Y) := \frac{\partial\Phi(x,Y)}{\partial y_\mu} \quad \text{e} \quad B_\alpha(x,Y) := \frac{\partial\Phi(x,Y)}{\partial X^\alpha} \tag{1.20}$$

(dove le derivate parziali vanno intese nel senso detto), le (1.19) si possono riscrivere come

$$
\begin{aligned}
y_\mu &= A^\mu(x,Y)\frac{\partial y_\mu(x,Y)}{\partial x^\nu} + B_\beta(x,Y)\frac{\partial y_\mu(x,Y)}{\partial Y_\beta} \\
X^\alpha &= A^\nu(x,Y)\frac{\partial X^\alpha(x,Y)}{\partial x^\nu} + B_\beta(x,Y)\frac{\partial X^\alpha(x,Y)}{\partial Y_\beta}
\end{aligned}
$$

ovvero, mettendo esplicitamente in evidenza l'azione degli operatori differenziali:

$$
y_\mu = \left(A^\nu(x,Y)\frac{\partial}{\partial x^\nu} + B_\beta(x,Y)\frac{\partial}{\partial Y_\beta}\right) y_\mu(x,Y) \tag{1.21a}
$$

$$
X^\alpha = \left(A^\nu(x,Y)\frac{\partial}{\partial x^\nu} + B_\beta(x,Y)\frac{\partial}{\partial Y_\beta}\right) X^\alpha(x,Y) \tag{1.21b}
$$

1.3 Algebra BRS dei simplectomorfismi

Abbiamo visto che a livello locale il generico simplectomorfismo (1.3) è completamente descritto da una singola funzione generatrice $\Phi(x,Y)$ definita su S, per mezzo delle corrispondenze (1.18). È naturale allora chiedersi in che modo agisce su $\Phi(x,Y)$ il gruppo dei simplectomorfismi[1] di S, considerata (localmente) come un fibrato banale $M \times \mathbb{R}^n$ munito di coordinate (x,Y). Allo scopo di studiare l'azione (infinitesima) di tale gruppo adotteremo un approccio basato sull'algebra differenziale BRS [6].

Supponiamo dunque che sulla varietà S sia definito un operatore s *nilpotente*

$$
\mathrm{s}^2 = 0 \tag{1.22}
$$

e che anticommuta con d: $\{\mathrm{d},\mathrm{s}\} = 0$. Esso agirà in particolare su $\Phi(x,Y)$; definiamo

$$
\Lambda(x,Y) := \mathrm{s}\Phi(x,Y) \tag{1.23}
$$

dove $\Lambda(x,Y)$ è un campo di numeri di Grassmann. Per la (1.22) risulta ovviamente $\mathrm{s}\Lambda(x,Y) = 0$. Inoltre

$$
\mathrm{sd}\Phi(x,Y) = \mathrm{s}y_\mu(x,Y)\,\mathrm{d}x^\mu + \mathrm{s}X^\alpha(x,Y)\,\mathrm{d}Y_\alpha \tag{1.24}
$$

ma d'altro canto (usando la definizione (1.6))

$$
\begin{aligned}
\mathrm{sd}\Phi(x,Y) &= -\,\mathrm{ds}\Phi(x,Y) \\
&= -\,\mathrm{d}\Lambda(x,Y) \\
&= -(\mathrm{d}x^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu} + \mathrm{d}Y_\alpha\frac{\partial}{\partial Y_\alpha})\Lambda(x,Y) \\
&= \frac{\partial\Lambda(x,Y)}{\partial x^\mu}\,\mathrm{d}x^\mu + \frac{\partial\Lambda(x,Y)}{\partial Y_\alpha}\,\mathrm{d}Y_\alpha
\end{aligned} \tag{1.25}
$$

[1] O meglio, la componente connessa all'identità di tale gruppo.

Uguagliando le due espressioni ottenute nella (1.24) e nella (1.25) si ricava l'azione di s sulle funzioni (1.4):

$$\begin{aligned} \mathrm{s}y_\mu(x,Y) &= \frac{\partial\Lambda(x,Y)}{\partial x^\mu} \equiv \partial_\mu\Lambda(x,Y) \\ \mathrm{s}X^\alpha(x,Y) &= \frac{\partial\Lambda(x,Y)}{\partial Y_\alpha} \equiv \partial^\alpha\Lambda(x,Y) \end{aligned} \tag{1.26}$$

(D'ora in avanti useremo, per una maggiore compattezza delle formule, la notazione sintetica ∂_μ e ∂^α per denotare gli operatori di derivazione parziale rispetto alle coordinate canoniche (x^μ, Y_α) su S.)

Utilizzando ancora una volta le uguaglianze (1.12) su $T(S)$ possiamo riscrivere le (1.26) nella maniera seguente:

$$\begin{aligned} \mathrm{s}y_\mu(x,Y) &= \frac{\partial\Lambda(x,Y)}{\partial y_\nu}\partial_\nu y_\mu(x,Y) + \frac{\partial\Lambda(x,Y)}{\partial X^\beta}\partial^\beta y_\mu(x,Y) \\ \mathrm{s}X^\alpha(x,Y) &= \frac{\partial\Lambda(x,Y)}{\partial y_\nu}\partial_\nu X^\alpha(x,Y) + \frac{\partial\Lambda(x,Y)}{\partial X^\beta}\partial^\beta X^\alpha(x,Y) \end{aligned} \tag{1.27}$$

Se ora definiamo

$$C^\mu(x,Y) := \frac{\partial\Lambda(x,Y)}{\partial y_\mu} \quad \text{e} \quad M_\alpha(x,Y) := \frac{\partial\Lambda(x,Y)}{\partial X^\alpha} \tag{1.28}$$

le (1.27) diventano

$$\begin{aligned} \mathrm{s}y_\mu(x,Y) &= C^\nu(x,Y)\partial_\nu y_\mu(x,Y) + M_\beta(x,Y)\partial^\beta y_\mu(x,Y) \\ \mathrm{s}X^\alpha(x,Y) &= C^\nu(x,Y)\partial_\mu X^\alpha(x,Y) + M_\beta(x,Y)\partial^\beta X^\alpha(x,Y) \end{aligned}$$

che si possono scrivere in maniera più compatta come

$$\mathrm{s}y_\mu(x,Y) = \left(C^\nu(x,Y)\partial_\nu + M_\beta(x,Y)\partial^\beta\right) y_\mu(x,Y) \tag{1.29a}$$

$$\mathrm{s}X^\alpha(x,Y) = \left(C^\nu(x,Y)\partial_\nu + M_\beta(x,Y)\partial^\beta\right) X^\alpha(x,Y) \tag{1.29b}$$

Le (1.29) esprimono l'azione dell'operatore s come la composizione di due diffeomorfismi infinitesimi indipendenti: uno avente carattere "orizzontale", cioè associato a riparametrizzazioni delle coordinate x^μ sulla varietà di base M, e uno di carattere "verticale", che viceversa coinvolge esclusivamente le coordinate delle fibre Y_α. Queste riparametrizzazioni sono pilotate, a livello infinitesimo, rispettivamente dai campi (di Grassmann) $C^\mu(x,Y)$ e $M_\alpha(x,Y)$, che assumono quindi un ruolo geometrico ben determinato.

In particolare notiamo i due casi limite:

1. Quando la funzione $\Lambda(x,Y)$ (definita dalla (1.23)) non presenta dipendenza implicita dalle X^α risulta $M_\alpha(x,Y) \equiv 0$ e l'azione di s si riduce a una riparametrizzazione sulla varietà di base M;

2. Viceversa quando $\Lambda(x,Y)$ non dipende dalle y_μ si ha $C^\mu(x,Y) \equiv 0$; in tal caso l'azione di s è puramente verticale e si riduce a una riparametrizzazione sulle fibre di S.

Riapplicando s alle (1.29) e sfruttando la nilpotenza (1.22) possiamo ricavare l'azione di s su C^μ e M_α. Si ottiene

$$\begin{aligned} \mathrm{s}C^\nu(x,Y) &= \left(C^\mu(x,Y)\partial_\mu + M_\beta(x,Y)\partial^\beta\right) C^\nu(x,Y) \\ \mathrm{s}M_\alpha(x,Y) &= \left(C^\nu(x,Y)\partial_\nu + M_\beta(x,Y)\partial^\beta\right) M_\alpha(x,Y) \end{aligned} \tag{1.30}$$

Resta da capire come agisce l'operatore s sui campi A^μ e B_α. A tale scopo, applichiamo s ad entrambi i membri nelle (1.21); omettendo per un attimo la dipendenza esplicita dalle coordinate delle espressioni coinvolte per alleggerire le formule, si ha

$$\mathrm{s}y_\mu = \mathrm{s}(A^\rho\partial_\rho y_\mu + B_\alpha\partial^\alpha y_\mu) \tag{1.31a}$$
$$\mathrm{s}X^\alpha = \mathrm{s}\left(A^\nu\partial_\nu X^\alpha + B_\beta\partial^\beta X^\alpha\right) \tag{1.31b}$$

Possiamo limitarci a considerare la (1.31a): agendo con s nella parentesi a secondo membro e sostituendo per sy_μ la già ricavata (1.29a) si ha

$$\begin{aligned} \mathrm{s}y_\mu = {}& \mathrm{s}A^\rho\partial_\rho y_\mu + A^\rho\partial_\rho\left(C^\nu\partial_\nu y_\mu + M_\beta\partial^\beta y_\mu\right) + \\ & + \mathrm{s}B_\alpha\partial^\alpha y_\mu + B_\alpha\partial^\alpha\left(C^\nu\partial_\nu y_\mu + M_\beta\partial^\beta y_\mu\right) \end{aligned}$$

Questa espressione va confrontata con la stessa (1.29a) nella quale si sia espressa y_μ mediante la (1.21a):

$$\mathrm{s}y_\mu = C^\nu\partial_\nu\left(A^\rho\partial_\rho y_\mu + B_\beta\partial^\beta y_\mu\right) + M_\beta\partial^\beta\left(A^\rho\partial_\rho y_\mu + B_\beta\partial^\beta y_\mu\right)$$

Dal confronto emergono le relazioni

$$\begin{aligned} \mathrm{s}A^\mu &= \left(C^\nu\partial_\nu + M_\beta\partial^\beta\right) A^\mu - \left(A^\rho\partial_\rho + B_\alpha\partial^\alpha\right) C^\mu \\ \mathrm{s}B_\alpha &= \left(C^\nu\partial_\nu + M_\beta\partial^\beta\right) B_\alpha - \left(A^\rho\partial_\rho + B_\alpha\partial^\alpha\right) M_\alpha \end{aligned}$$

ovvero (ripristinando la notazione usuale)

$$\begin{aligned} \mathrm{s}A^\mu(x,Y) = {}& \left(C^\nu(x,Y)\partial_\nu + M_\beta(x,Y)\partial^\beta\right) A^\mu(x,Y) + \\ & - \left(A^\rho(x,Y)\partial_\rho + B_\alpha(x,Y)\partial^\alpha\right) C^\mu(x,Y) \end{aligned} \tag{1.32a}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{s}B_\alpha(x,Y) = {}& \left(C^\nu(x,Y)\partial_\nu + M_\beta(x,Y)\partial^\beta\right) B_\alpha(x,Y) + \\ & - \left(A^\rho(x,Y)\partial_\rho + B_\alpha(x,Y)\partial^\alpha\right) M_\alpha(x,Y) \end{aligned} \tag{1.32b}$$

1.4 Riparametrizzazioni in x

D'ora in poi ci metteremo sistematicamente nel primo dei due casi particolari evidenziati nella sezione precedente, supporremo cioè che Λ non dipenda dalle X^α:

$$\Lambda(x, Y) = \Lambda(y_\mu(x, Y)) \quad \Rightarrow \quad M_\alpha(x, Y) := \frac{\partial \Lambda(x, Y)}{\partial X^\alpha} \equiv 0$$

Inoltre ci muoveremo su un piano orizzontale a Y^α costanti, di fatto "congelando" i gradi di libertà lungo le fibre:

$$\Phi(x, Y) = \Phi(x)|_{Y_\alpha = \mathrm{cost}}\,, \quad \Lambda(x, Y) = \Lambda(x)|_{Y_\alpha = \mathrm{cost}}\,, \quad \text{etc.}$$

In conseguenza di queste scelte, le (1.29) si semplificano drasticamente:

$$\mathrm{s}y_\mu(x) = C^\nu(x)\partial_\nu y_\mu(x) \tag{1.33a}$$

$$\mathrm{s}X^\alpha(x) = C^\nu(x)\partial_\nu X^\alpha(x) \tag{1.33b}$$

e analogamente le (1.32):

$$\mathrm{s}A^\mu(x) = C^\nu(x)\partial_\nu A^\mu(x) - A^\rho(x)\partial_\rho C^\mu(x) \tag{1.34a}$$

$$\mathrm{s}B_\alpha(x) = C^\nu(x)\partial_\nu B_\alpha(x) \tag{1.34b}$$

Notiamo che le (1.34) coincidono con le leggi di trasformazione BRS di un vettore controvariante e di uno scalare (rispettivamente) sotto diffeomorfismi infinitesimi della varietà M; questa circostanza conferma che siamo sulla strada giusta. Infine dalle (1.30) si ha che

$$\mathrm{s}C^\nu(x) = C^\mu(x)\partial_\mu C^\nu(x) \tag{1.35}$$

coerentemente con l'identificazione sopra evidenziata.

Per analogia con i campi $A^\mu(x)$ e $C^\mu(x)$ definiamo ora delle nuove quantità tensoriali *a più indici* controvarianti, e *completamente simmetriche* in tali indici:

$$A^{\mu_1 \ldots \mu_k}(x) := \frac{1}{k!}\, \frac{\partial^k \Phi(x, Y)}{\partial y_{\mu_1} \ldots \partial y_{\mu_k}}\bigg|_{Y_\alpha = \mathrm{cost}} \tag{1.36a}$$

$$C^{\mu_1 \ldots \mu_k}(x) := \frac{1}{k!}\, \frac{\partial^k \Lambda(x, Y)}{\partial y_{\mu_1} \ldots \partial y_{\mu_k}}\bigg|_{Y_\alpha = \mathrm{cost}} \tag{1.36b}$$

Si noti che, avendo assunto M di classe C^∞, le (1.36) sono valide per valori di k arbitrariamente alti: è quindi possibile costruire una "torre" potenzialmente infinita di campi, ognuno dei quali ha un carattere tensoriale ben preciso rispetto a cambi di coordinate su M. Saranno proprio i campi definiti dalla (1.36a) ad essere utilizzati nel seguito per descrivere la dinamica degli oggetti di spin elevato.

È indispensabile mettere a punto un meccanismo sistematico per calcolare l'azione di s sui campi (1.36). Esso ci viene fornito dalla seguente:

Proposizione 1.3. *Risulta:*

$$\left[\mathrm{s}, \frac{\partial}{\partial y_\mu}\right] = C^\nu(x)\left[\partial_\nu, \frac{\partial}{\partial y_\mu}\right] - \partial_\rho C^\mu(x)\frac{\partial}{\partial y_\rho} \tag{1.37}$$

Dimostrazione. Per calcolo diretto è

$$\left[\mathrm{s}, \frac{\partial}{\partial y_\mu}\right]\Phi(x) = \mathrm{s}\frac{\partial\Phi(x)}{\partial y_\mu} - \frac{\partial}{\partial y_\mu}\mathrm{s}\Phi(x) = \mathrm{s}A^\mu(x) - C^\mu(x) \tag{1.38}$$

e usando la (1.34a):

$$\begin{aligned}\mathrm{s}A^\mu(x) - C^\mu(x) &= C^\nu(x)\partial_\nu A^\mu(x) - A^\nu(x)\partial_\nu C^\mu(x) - C^\mu(x)\\ &= C^\nu(x)\left(\partial_\nu A^\mu(x) - \frac{\partial y_\nu(x)}{\partial y_\mu}\right) - A^\nu(x)\partial_\nu C^\mu(x)\end{aligned}$$

essendo ovviamente $\partial y_\nu/\partial y_\mu = \delta^\mu_\nu$. Esprimendo tutto in funzione di $\Phi(x)$:

$$\left[\mathrm{s}, \frac{\partial}{\partial y_\mu}\right]\Phi(x) = C^\nu(x)\left(\partial_\nu\frac{\partial}{\partial y_\mu} - \frac{\partial}{\partial y_\mu}\partial_\nu\right)\Phi(x) - \partial_\nu C^\mu(x)\frac{\partial}{\partial y_\nu}\Phi(x)$$

da cui la (1.37). □

Nel ragionamento precedente abbiamo sfruttato il fatto di conoscere già le variazioni di $A^\mu(x)$ per calcolare il commutatore (1.37); invertendo il processo, possiamo sfruttare la conoscenza della (1.37) per calcolare ex novo le variazioni dei campi di ordine superiore. Per esempio per $n = 2$ si ha che

$$\left[\mathrm{s}, \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y_{\mu_1}}\frac{\partial}{\partial y_{\mu_2}}\right]\Phi(x) = \mathrm{s}A^{\mu_1\mu_2}(x) - C^{\mu_1\mu_2}(x)$$

per calcolo diretto, e d'altra parte usando la (1.37):

$$\begin{aligned}\left[\mathrm{s}, \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y_{\mu_1}}\frac{\partial}{\partial y_{\mu_2}}\right]\Phi(x) = {}& C^\nu(x)\partial_\nu A^{\mu_1\mu_2}(x) - A^{\nu\mu_2}(x)\partial_\nu C^{\mu_1}(x)\\ &- A^{\mu_1\nu}(x)\partial_\nu C^{\mu_2}(x) - A^\nu(x)\partial_\nu C^{\mu_1\mu_2}(x)\\ &+ C^{\nu\mu_2}(x)\partial_\nu A^{\mu_1}(x) + C^{\mu_1\nu}(x)\partial_\nu A^{\mu_2}(x) - C^{\mu_1\mu_2}(x)\end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned}\mathrm{s}A^{\mu_1\mu_2}(x) = {}& C^\nu(x)\partial_\nu A^{\mu_1\mu_2}(x) + C^{\nu\mu_2}(x)\partial_\nu A^{\mu_1}(x) + C^{\mu_1\nu}(x)\partial_\nu A^{\mu_2}(x)\\ &- A^\nu(x)\partial_\nu C^{\mu_1\mu_2}(x) - A^{\nu\mu_2}(x)\partial_\nu C^{\mu_1}(x) - A^{\mu_1\nu}(x)\partial_\nu C^{\mu_2}(x)\end{aligned}$$

che è la legge di trasformazione per il campo a due indici $A^{\mu_1\mu_2}(x)$. Similmente si ottiene per $k = 3$

$$\begin{aligned}\mathrm{s}A^{\mu_1\mu_2\mu_3}(x) = {}& C^\lambda(x)\partial_\lambda A^{\mu_1\mu_2\mu_3}(x) + C^{\lambda\mu_3}(x)\partial_\lambda A^{\mu_1\mu_2}(x) + C^{\lambda\mu_2}(x)\partial_\lambda A^{\mu_1\mu_3}(x)\\ &+ C^{\lambda\mu_1}(x)\partial_\lambda A^{\mu_2\mu_3}(x) + C^{\lambda\mu_2\mu_3}(x)\partial_\lambda A^{\mu_1}(x) + C^{\mu_1\lambda\mu_3}(x)\partial_\lambda A^{\mu_2}(x)\\ &+ C^{\mu_1\mu_2\lambda}(x)\partial_\lambda A^{\mu_3}(x) - A^\lambda(x)\partial_\lambda C^{\mu_1\mu_2\mu_3}(x) - A^{\lambda\mu_3}(x)\partial_\lambda C^{\mu_1\mu_2}(x)\\ &- A^{\lambda\mu_2}(x)\partial_\lambda C^{\mu_1\mu_3}(x) - A^{\lambda\mu_1}(x)\partial_\lambda C^{\mu_2\mu_3}(x) - A^{\lambda\mu_2\mu_3}(x)\partial_\lambda C^{\mu_1}(x)\\ &- A^{\mu_1\lambda\mu_3}(x)\partial_\lambda C^{\mu_2}(x) - A^{\mu_1\mu_2\lambda}(x)\partial_\lambda C^{\mu_3}(x)\end{aligned}$$

e così via. Allora la legge di trasformazione del generico campo a k indici è chiara: sarà

$$\begin{aligned} \mathrm{s}A^{\mu_1\cdots\mu_k}(x) = \delta^{\mu_1\cdots\mu_k}_{\rho_1\cdots\rho_k} \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} \big(& C^{\nu\rho_{i+1}\cdots\rho_k}(x)\partial_\nu A^{\rho_1\cdots\rho_i}(x) + \\ & - A^{\nu\rho_{i+1}\cdots\rho_k}(x)\partial_\nu C^{\rho_1\cdots\rho_i}(x)\big) \end{aligned} \tag{1.39}$$

in cui è stato necessario introdurre un coefficiente binomiale davanti ai vari termini non simmetrizzati a causa della normalizzazione dei δ di Kronecker a più indici (cfr. Notazioni, eq. (5)).

La caratteristica principale della legge (1.39) è che la variazione del campo a k indici $A^{\mu_1\cdots\mu_k}(x)$ coinvolge tutti i campi (e i ghost) di rango inferiore $A^{\mu_1\cdots\mu_j}(x)$ e $C^{\mu_1\cdots\mu_j}(x)$, per tutti i valori di $1 \leq j < k$. In effetti appare chiaro dalla (1.39) come il ruolo dei ghost a più indici sia quello di mantenere la condizione $M_\alpha(x, Y) = 0$ a tutti i livelli successivi nella torre dei campi (1.36a).

Un meccanismo simile a quello che ha portato alla (1.39) consente di trovare la legge di trasformazione generale dei ghost. Procediamo anzitutto nel caso $k = 1$: applicando la (1.37) a Λ anzichè a Φ si ottiene

$$\left[\mathrm{s}, \frac{\partial}{\partial y_\mu}\right] \Lambda(x) = C^\nu(x) \left[\partial_\nu, \frac{\partial}{\partial y_\mu}\right] \Lambda(x) - \partial_\rho C^\mu(x) \frac{\partial \Lambda(x)}{\partial y_\rho}$$

Ricordando la proposizione 1.1 e notando che, nelle condizioni attuali, il termine in Z presente nella (1.17) non contribuisce perchè $\frac{\partial \Lambda(x)}{\partial X^\alpha} = 0$, si ha

$$\left[\mathrm{s}, \frac{\partial}{\partial y_\mu}\right] \Lambda(x) = C^\nu(x) T^\mu_{\nu\rho}(x) C^\rho(x) - \partial_\rho C^\mu(x) C^\rho(x) \tag{1.40}$$

Proposizione 1.4. *Nelle ipotesi fatte all'inizio di questa sezione, le quantità $T^\mu_{\nu\rho}(x)$ che figurano nella (1.17) sono simmetriche negli indici bassi.*

Dimostrazione. Per calcolo diretto è

$$\left[\partial_\nu, \frac{\partial}{\partial y_\mu}\right] \Phi(x) = \partial_\nu A^\mu(x) - \delta^\mu_\nu$$

e confrontando con la (1.17) applicata a $\Phi(x)$ si ottiene l'uguaglianza

$$T^\mu_{\nu\rho}(x) A^\rho(x) + Z^{\mu\beta}_\nu(x) B_\beta(x) = \partial_\nu A^\mu(x) - \delta^\mu_\nu \tag{1.41}$$

Definiamo un operatore (matriciale) $\mathcal{D}_\rho$ nella maniera seguente:

$$(\mathcal{D}_\rho)^\mu{}_\nu := \delta^\mu_\rho \partial_\nu - T^\mu_{\nu\rho}(x)$$

Allora la (1.41) si scriverà

$$\mathcal{D}_\rho A^\rho(x) = Z^\beta(x) B_\beta(x) + I$$

dove $(Z^{\beta}(x))^{\mu}{}_{\nu} := Z^{\mu\beta}_{\nu}(x)$ e I è la matrice identità $n \times n$.

Se ora consideriamo il commutatore tra due operatori $\mathcal{D}$ avremo che, in tutta generalità,

$$[\mathcal{D}_\rho, \mathcal{D}_\mu]\, A^\nu(x) = \mathcal{R}^\nu{}_{\lambda\rho\mu}(x)A^\lambda(x) - \mathcal{T}^\sigma{}_{\rho\mu}(x)\mathcal{D}_\sigma A^\nu(x)$$

Ma a secondo membro non figura alcuna derivata di $B_\beta(x)$, e quindi deve essere $\mathcal{T}^\sigma{}_{\rho\mu}(x) = 0$; se ne conclude che i coefficienti T sono simmetrici negli indici bassi. □

Questo risultato ci dice che il primo addendo della (1.40) è nullo, perchè contrazione dell'espressione antisimmetrica $C^\nu(x)C^\rho(x)$ con l'espressione simmetrica $T^\mu_{\nu\rho}(x)$. Ne segue che

$$\left[\mathrm{s}, \frac{\partial}{\partial y_\mu}\right] \Lambda(x) = -\partial_\rho C^\mu(x) C^\rho(x) = C^\rho(x)\partial_\rho C^\mu(x)$$

D'altra parte è, per calcolo diretto,

$$\left[\mathrm{s}, \frac{\partial}{\partial y_\mu}\right] \Lambda(x) = \mathrm{s}\frac{\partial \Lambda(x)}{\partial y_\mu} - \frac{\partial}{\partial y_\mu}\mathrm{s}\Lambda(x) = \mathrm{s}C^\mu(x)$$

e confrontando le due espressioni ottenute si ritrova la (1.35):

$$\mathrm{s}C^\mu(x) = C^\rho(x)\partial_\rho C^\mu(x)$$

Ai ranghi successivi, per esempio $k = 2$, si ottiene

$$\mathrm{s}C^{\mu_1\mu_2}(x) = C^\rho(x)\partial_\rho C^{\mu_1\mu_2}(x) + C^{\mu_1\rho}(x)\partial_\rho C^{\mu_2}(x) + C^{\rho\mu_2}(x)\partial_\rho C^{\mu_1}(x)$$

e per $k = 3$:

$$\begin{aligned}\mathrm{s}C^{\mu_1\mu_2\mu_3}(x) = {} & C^\lambda(x)\partial_\lambda C^{\mu_1\mu_2\mu_3}(x) + C^{\lambda\mu_1}(x)\partial_\lambda C^{\mu_2\mu_3}(x) + C^{\lambda\mu_2}(x)\partial_\lambda C^{\mu_1\mu_3}(x)\\ & + C^{\lambda\mu_3}(x)\partial_\lambda C^{\mu_1\mu_2}(x) + C^{\lambda\mu_2\mu_3}(x)\partial_\lambda C^{\mu_1}(x) + C^{\mu_1\lambda\mu_3}(x)\partial_\lambda C^{\mu_2}(x)\\ & + C^{\mu_1\mu_2\lambda}(x)\partial_\lambda C^{\mu_3}(x)\end{aligned}$$

In generale, la legge di trasformazione dei ghost a k indici sarà dunque

$$\mathrm{s}C^{\mu_1\cdots\mu_k}(x) = \delta^{\mu_1\cdots\mu_k}_{\rho_1\cdots\rho_k} \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} C^{\nu\rho_{i+1}\cdots\rho_k}(x)\partial_\nu C^{\rho_1\cdots\rho_i}(x) \tag{1.42}$$

Si noti come, anche in questo caso, la (1.42) coinvolga esplicitamente tutti i ghost $C^{\mu_1\cdots\mu_j}(x)$ con $1 \le j < k$.

Capitolo 2

Studio della simmetria

2.1 L'algebra delle trasformazioni di simmetria

Nel capitolo precedente si è visto come, partendo da una geometria di tipo simplettico definita sullo spazio-tempo M e imponendo il vincolo di operare su di un piano "orizzontale", resti definita su M una famiglia di campi completamente controvarianti $A^{\mu_1 \cdots \mu_k}(x)$, con $1 \leq k < \infty$, che si possono assoggettare a delle trasformazioni descritte a livello infinitesimo (nel formalismo BRS) dalle leggi (1.39) e (1.42), che riportiamo di seguito:

$$\mathrm{s}C^{\mu_1 \cdots \mu_k}(x) = \delta^{\mu_1 \cdots \mu_k}_{\rho_1 \cdots \rho_k} \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} C^{\nu \rho_{i+1} \cdots \rho_k}(x) \partial_\nu C^{\rho_1 \cdots \rho_i}(x) \tag{2.1a}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{s}A^{\mu_1 \cdots \mu_k}(x) = \delta^{\mu_1 \cdots \mu_k}_{\rho_1 \cdots \rho_k} \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} \big(& C^{\nu \rho_{i+1} \cdots \rho_k}(x) \partial_\nu A^{\rho_1 \cdots \rho_i}(x) + \\ & - A^{\nu \rho_{i+1} \cdots \rho_k}(x) \partial_\nu C^{\rho_1 \cdots \rho_i}(x) \big) \end{aligned} \tag{2.1b}$$

Caratteristica fondamentale delle leggi (2.1) è che la variazione del campo di rango k coinvolge esplicitamente tutti i campi di rango inferiore a k: si ha quindi una "torre" (potenzialmente infinita) di campi in cui ciascun livello dipende, in maniera essenziale, dai livelli inferiori.

Dalla legge di trasformazione dei ghost possiamo ora ricavare la natura dell'algebra delle trasformazioni che è emersa dalla costruzione effettuata. A tale scopo, riscriviamo la (2.1a) in modo tale da poter leggere da essa le costanti di struttura dell'algebra.

Da un punto di vista prettamente schematico, cioè trascurando tutti i fattori numerici e le simmetrizzazioni, la trasformazione del generico ghost di rango k $C^{(k)}$ ha una struttura del tipo

$$\mathrm{s}C^{(k)} = C^{(k)} \partial C^{(1)} + C^{(k-1)} \partial C^{(2)} + \ldots + C^{(1)} \partial C^{(k)}$$

ovvero

$$\mathrm{s}C^{(k)} = \sum_{i=1}^{k} C^{(k-i+1)} \partial C^{(i)}$$

Ne segue che la legge (2.1a) si può mettere nella forma

$$\mathrm{s}C^{\rho_1\dots\rho_k}(x) = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\int f^{\rho_1\dots\rho_k}_{\mu_1\dots\mu_i\nu_1\dots\nu_{k-i+1}}(x,x',x'')C^{\nu_1\dots\nu_{k-i+1}}(x'')C^{\mu_1\dots\mu_i}(x')\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}x'' \tag{2.2}$$

dove le $f^{\rho_1\dots\rho_k}_{\mu_1\dots\mu_i\nu_1\dots\nu_{k-i+1}}(x,x',x'')$ saranno opportune funzioni (generalizzate) la cui dipendenza spaziale sarà data unicamente da δ di Dirac e loro derivate prime, come ci si aspetta da una teoria di campo *locale*.

Proposizione 2.1. *Risulta:*

$$\begin{aligned} f^{\rho_1\dots\rho_k}_{\mu_1\dots\mu_i\nu_1\dots\nu_{k-i+1}}&(x,x',x'') = \\ &= \frac{k!}{i!(k-i+1)!}\Bigg(\sum_{p=1}^{k-i+1}\delta^{\rho_1\dots\rho_k}_{\mu_1\dots\mu_i\nu_1\dots\widehat{\nu_p}\dots\nu_{k-i+1}}\partial_{\nu_p}\delta(x-x')\delta(x-x'') + \\ &\qquad -\sum_{q=1}^{i}\delta^{\rho_1\dots\rho_k}_{\mu_1\dots\widehat{\mu_q}\dots\mu_i\nu_1\dots\nu_{k-i+1}}\delta(x-x')\partial_{\mu_q}\delta(x-x'')\Bigg) \end{aligned} \tag{2.3}$$

(dove una notazione come $\mu_1\dots\widehat{\mu_q}\dots\mu_i$ significa che l'indice μ_q va omesso).

Dimostrazione. Dal confronto della (2.2) con la generica espansione della (2.1a) nei campi $C^{(k)}$ è chiaro che

$$f^{\rho_1\dots\rho_k}_{\mu_1\dots\mu_i\nu_1\dots\nu_{k-i+1}}(x,x',x'') = \frac{\delta^2\,\mathrm{s}C^{\rho_1\dots\rho_k}(x)}{\delta C^{\mu_1\dots\mu_i}(x')\delta C^{\nu_1\dots\nu_{k-i+1}}(x'')}$$

Le derivazioni funzionali sono laboriose ma concettualmente banali: si ha

$$\begin{aligned} \frac{\delta\,\mathrm{s}C^{\rho_1\dots\rho_k}(x)}{\delta C^{\nu_1\dots\nu_{k-i+1}}(x'')} &= \delta^{\rho_1\dots\rho_k}_{\sigma_1\dots\sigma_k}\sum_{p=1}^{k}\binom{k}{p}\Big(\delta^p_i\delta^{\lambda\sigma_{p+1}\dots\sigma_k}_{\nu_1\dots\nu_{k-i+1}}\delta(x-x'')\partial_\lambda C^{\sigma_1\dots\sigma_p}(x) + \\ &\qquad - C^{\lambda\sigma_{p+1}\dots\sigma_k}(x)\delta^p_{k-i+1}\delta^{\sigma_1\dots\sigma_p}_{\nu_1\dots\nu_{k-i+1}}\partial_\lambda\delta(x-x'')\Big) \\ &= \delta^{\rho_1\dots\rho_k}_{\sigma_1\dots\sigma_k}\Big(\frac{k!}{i!(k-i)!}\delta^{\lambda\sigma_{i+1}\dots\sigma_k}_{\nu_1\dots\nu_{k-i+1}}\delta(x-x'')\partial_\lambda C^{\sigma_1\dots\sigma_i}(x) + \\ &\qquad - \frac{k!}{(k-i+1)!(i-1)!}C^{\lambda\sigma_{k-i+2}\dots\sigma_k}(x)\delta^{\sigma_1\dots\sigma_{k-i+1}}_{\nu_1\dots\nu_{k-i+1}}\partial_\lambda\delta(x-x'')\Big) \end{aligned}$$

e

$$\frac{\delta^2\, \mathrm{s}C^{\rho_1\dots\rho_k}(x)}{\delta C^{\mu_1\dots\mu_i}(x')\delta C^{\nu_1\dots\nu_{k-i+1}}(x'')} =$$
$$= \delta^{\rho_1\dots\rho_k}_{\sigma_1\dots\sigma_k}\Big(\frac{k!}{i!(k-i)!}\delta^{\lambda\sigma_{i+1}\dots\sigma_k}_{\nu_1\dots\nu_{k-i+1}}\delta(x-x'')\delta^{\sigma_1\dots\sigma_i}_{\mu_1\dots\mu_i}\partial_\lambda\delta(x-x') +$$
$$- \frac{k!}{(k-i+1)!(i-1)!}\delta^{\lambda\sigma_{k-i+2}\dots\sigma_k}_{\mu_1\dots\mu_i}\delta(x-x')\delta^{\sigma_1\dots\sigma_{k-i+1}}_{\nu_1\dots\nu_{k-i+1}}\partial_\lambda\delta(x-x'')\Big) \quad (2.4)$$

Allo scopo di porre tale espressione in una forma più conveniente, prendiamo separatamente in considerazione i suoi due addendi. Il primo è

$$\frac{k!}{i!(k-i)!}\delta^{\rho_1\dots\rho_k}_{\sigma_1\dots\sigma_k}\delta^{\lambda\sigma_{i+1}\dots\sigma_k}_{\nu_1\dots\nu_{k-i+1}}\delta^{\sigma_1\dots\sigma_i}_{\mu_1\dots\mu_i}\delta(x-x'')\partial_\lambda\delta(x-x')$$

Si noti che

$$\delta^{\lambda\sigma_{i+1}\dots\sigma_k}_{\nu_1\dots\nu_{k-i+1}} = \frac{1}{k-i+1}\sum_{p=1}^{k-i+1}\delta^{\lambda}_{\nu_p}\delta^{\sigma_{i+1}\dots\sigma_k}_{\nu_1\dots\widehat{\nu}_p\dots\nu_{k-i+1}}$$

e sostituendo si ottiene

$$\frac{k!}{i!(k-i)!}\frac{1}{k-i+1}\sum_{p=1}^{k-i+1}\delta^{\rho_1\dots\rho_k}_{\sigma_1\dots\sigma_k}\delta^{\sigma_{i+1}\dots\sigma_k}_{\nu_1\dots\widehat{\nu}_p\dots\nu_{k-i+1}}\delta^{\sigma_1\dots\sigma_i}_{\mu_1\dots\mu_i}\delta(x-x'')\partial_{\nu_p}\delta(x-x') =$$
$$= \frac{k!}{i!(k-i+1)!}\sum_{p=1}^{k-i+1}\delta^{\rho_1\dots\rho_k}_{\mu_1\dots\mu_i\nu_1\dots\widehat{\nu}_p\dots\nu_{k-i+1}}\delta(x-x'')\partial_{\nu_p}\delta(x-x')$$

Analogamente nel secondo addendo della (2.4) si avrà

$$-\frac{k!}{(k-i+1)!(i-1)!}\delta^{\rho_1\dots\rho_k}_{\sigma_1\dots\sigma_k}\delta^{\lambda\sigma_{k-i+2}\dots\sigma_k}_{\mu_1\dots\mu_i}\delta^{\sigma_1\dots\sigma_{k-i+1}}_{\nu_1\dots\nu_{k-i+1}}\delta(x-x')\partial_\lambda\delta(x-x'') =$$
$$= -\frac{k!}{(k-i+1)!i!}\sum_{q=1}^{i}\delta^{\rho_1\dots\rho_k}_{\sigma_1\dots\sigma_k}\delta^{\sigma_{k-i+2}\dots\sigma_k}_{\mu_1\dots\widehat{\mu}_q\dots\mu_i}\delta^{\sigma_1\dots\sigma_{k-i+1}}_{\nu_1\dots\nu_{k-i+1}}\delta(x-x')\partial_{\mu_q}\delta(x-x'')$$

in cui si è usato il fatto che

$$\delta^{\lambda\sigma_{k-i+2}\dots\sigma_k}_{\mu_1\dots\mu_i} = \frac{1}{i}\sum_{q=1}^{i}\delta^{\lambda}_{\mu_q}\delta^{\sigma_{k-i+2}\dots\sigma_k}_{\mu_1\dots\widehat{\mu}_q\dots\mu_i}$$

Quindi il termine in questione si scrive

$$= -\frac{k!}{(k-i+1)!i!}\sum_{q=1}^{i}\delta^{\rho_1\dots\rho_k}_{\mu_1\dots\widehat{\mu}_q\dots\mu_i\nu_1\dots\nu_{k-i+1}}\delta(x-x')\partial_{\mu_q}\delta(x-x'')$$

e mettendo tutto assieme la (2.4) diventa

$$
\begin{aligned}
&f^{\rho_1\ldots\rho_k}_{\mu_1\ldots\mu_i\nu_1\ldots\nu_{k-i+1}}(x,x',x'') = \\
&\qquad = \frac{k!}{i!(k-i+1)!}\Bigg(\sum_{p=1}^{k-i+1}\delta^{\rho_1\ldots\rho_k}_{\mu_1\ldots\mu_i\nu_1\ldots\widehat{\nu}_p\ldots\nu_{k-i+1}}\partial_{\nu_p}\delta(x-x')\delta(x-x'') + \\
&\qquad\qquad - \sum_{q=1}^{i}\delta^{\rho_1\ldots\rho_k}_{\mu_1\ldots\widehat{\mu}_q\ldots\mu_i\nu_1\ldots\nu_{k-i+1}}\delta(x-x')\partial_{\mu_q}\delta(x-x'')\Bigg)
\end{aligned}
$$

che è la (2.3). □

Abbiamo quindi a che fare con un gruppo di trasformazioni di dimensione infinita e *non abeliano* ($f \neq 0$), localmente determinato dalle costanti di struttura (2.3). Esso si può vedere come un'estensione del gruppo dei diffeomorfismi della varietà spazio-temporale M, cui si riduce quando $k = 1$: infatti in tal caso è

$$
f^{\rho}_{\mu\nu}(x,x',x'') = \delta^{\rho}_{\mu}\partial_{\nu}\delta(x-x')\delta(x-x'') - \delta^{\rho}_{\nu}\partial_{\mu}\delta(x-x'')\delta(x-x') \tag{2.5}
$$

che sono proprio le costanti di struttura che caratterizzano $\mathrm{Diff}(M)$ [11, p. 103].

Quando si considerano campi di rango più alto entrano in gioco più insiemi di costanti di struttura "generalizzate" con k indici controvarianti e $k+1$ indici covarianti: per esempio per $k = 2$ si hanno

$$
\begin{aligned}
f^{\rho_1\rho_2}_{\mu\nu_1\nu_2} = {}& \delta^{\rho_1\rho_2}_{\mu\nu_2}\partial_{\nu_1}\delta(x-x')\delta(x-x'') + \delta^{\rho_1\rho_2}_{\mu\nu_1}\partial_{\nu_2}\delta(x-x')\delta(x-x'') + \\
& - \delta^{\rho_1\rho_2}_{\nu_1\nu_2}\partial_{\mu}\delta(x-x'')\delta(x-x')
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f^{\rho_1\rho_2}_{\mu_1\mu_2\nu} = {}& \delta^{\rho_1\rho_2}_{\mu_1\mu_2}\partial_{\nu}\delta(x-x')\delta(x-x'') - \delta^{\rho_1\rho_2}_{\mu_2\nu}\partial_{\mu_1}\delta(x-x'')\delta(x-x') + \\
& - \delta^{\rho_1\rho_2}_{\mu_1\nu}\partial_{\mu_2}\delta(x-x'')\delta(x-x')
\end{aligned}
$$

e così via. Si noti che la divisione degli indici bassi in blocchi è importante, perchè memorizza il particolare settore nella torre dei campi ghost in cui intervengono le f nell'espressione (2.2); l'ordine dei vari indici all'interno di ciascun blocco invece è inessenziale, dato che le espressioni (2.3) sono evidentemente simmetriche per scambio di due qualunque tra gli indici di uno stesso blocco.

Note le (2.3) è immediato ricavare un'espressione generale per i *funzionali ausiliari* [11] della rappresentazione del gruppo indotta dall'azione infinitesima sui campi $A^{\mu_1\ldots\mu_k}(x)$ descritta dalla (2.1b). Anzitutto si avrà

$$
\mathrm{s}A^{\rho_1\ldots\rho_k}(x) = \sum_{i=1}^{k}\int f^{\rho_1\ldots\rho_k}_{\mu_1\ldots\mu_i\nu_1\ldots\nu_{k-i+1}}(x,x',x'')A^{\nu_1\ldots\nu_{k-i+1}}(x'')C^{\mu_1\ldots\mu_i}(x')\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}x''
$$

e d'altra parte è, per definizione,

$$\mathrm{s}A^{\rho_1\dots\rho_k}(x) = \sum_{i=1}^{k} \int R^{\rho_1\dots\rho_k}_{\mu_1\dots\mu_i}(x,x')C^{\mu_1\dots\mu_i}(x')\,\mathrm{d}x' \tag{2.6}$$

Ne segue che

$$R^{\rho_1\dots\rho_k}_{\mu_1\dots\mu_i}(x,x') = \int f^{\rho_1\dots\rho_k}_{\mu_1\dots\mu_i\nu_1\dots\nu_{k-i+1}}(x,x',x'')A^{\nu_1\dots\nu_{k-i+1}}(x'')\,\mathrm{d}x''$$

Per fare i conti conviene usare le costanti di struttura nella forma non semplificata (2.4); si ottiene così

$$\begin{aligned} R^{\rho_1\dots\rho_k}_{\mu_1\dots\mu_i}(x,x') = \binom{k}{i}\delta^{\rho_1\dots\rho_k}_{\sigma_1\dots\sigma_k}\Big(&\delta^{\sigma_1\dots\sigma_i}_{\mu_1\dots\mu_i}\partial_\lambda\delta(x-x')A^{\lambda\sigma_{i+1}\dots\sigma_k}(x) + \\ &+\frac{1}{k-i+1}\delta^{\lambda\sigma_{k-i+2}\dots\sigma_k}_{\mu_1\dots\mu_i}\partial_\lambda\delta(x-x')A^{\sigma_1\dots\sigma_{k-i+1}}(x)\Big) \end{aligned} \tag{2.7}$$

Infine l'operatore di simmetria globale BRS si scriverà, combinando la (2.6) e la (2.2):

$$\begin{aligned} \delta := \sum_i\Bigg(&\int R^{\rho_1\dots\rho_k}_{\mu_1\dots\mu_i}(x,x')C^{\mu_1\dots\mu_i}(x')\frac{\delta}{\delta A^{\rho_1\dots\rho_k}(x)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x' + \\ &-\frac{1}{2}\int f^{\rho_1\dots\rho_k}_{\mu_1\dots\mu_i\nu_1\dots\nu_{k-i+1}}(x,x',x'')C^{\nu_1\dots\nu_{k-i+1}}(x'')C^{\mu_1\dots\mu_i}(x')\frac{\delta}{\delta C^{\rho_1\dots\rho_k}(x)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}x''\Bigg) \end{aligned} \tag{2.8}$$

2.2 Algebra di Ward locale

Ricordiamo che in una generica teoria locale basata su un insieme di campi $\phi^i(x)$ che forniscono una rappresentazione di un determinato gruppo continuo di simmetrie caratterizzata dai funzionali ausiliari $R^i{}_a(x,x')$, la famiglia di operatori definiti ponendo

$$W_a(x) := -\int R^i{}_a(x,x')\frac{\delta}{\delta\phi^i(x')}\,\mathrm{d}x'$$

si dicono **operatori di Ward** associati alla simmetria locale in esame.

Nel nostro caso, per il generico campo $A^{(k)}$ il ruolo dell'indice astratto a è svolto, come si è visto, da una famiglia di indici tensoriali $\mu_1\dots\mu_i$, con i che corre da 1 a k; corrispondentemente, resta dunque definita una famiglia di operatori di Ward data esplicitamente da

$$W_{\mu_1\dots\mu_i}(x) = -\int R^{\rho_1\dots\rho_k}_{\mu_1\dots\mu_i}(x,x')\frac{\delta}{\delta A^{\rho_1\dots\rho_k}(x')}\,\mathrm{d}x' \tag{2.9}$$

dove gli R sono dati dalla (2.7). È evidente che gli operatori così definiti formano un'algebra isomorfa a quella del gruppo di simmetria della teoria:

$$\left[W_{\mu_1\dots\mu_i}(x), W_{\nu_1\dots\nu_j}(x')\right] = \int f^{\rho_1\dots\rho_{i+j-1}}_{\mu_1\dots\mu_i\nu_1\dots\nu_j}(x,x',x'')W_{\rho_1\dots\rho_{i+j-1}}(x'')\,\mathrm{d}x'' \tag{2.10}$$

Quest'algebra mappa il commutatore di due operatori rispettivamente di rango p e q in una combinazione lineare di operatori di rango $p+q-1$. In particolare l'insieme formato da tutti e soli gli operatori a un indice forma un *ideale* dell'algebra, essendo infatti

$$\begin{aligned}[][W_\mu(x), W_\nu(x')] &= \int \left(\delta^\rho_\mu\partial_\nu\delta(x-x')\delta(x-x'') - \delta^\rho_\nu\partial_\mu\delta(x-x'')\delta(x-x')\right)W_\rho(x'')\,\mathrm{d}x'' \\ &= W_\mu(x)\partial_\nu\delta(x-x') - W_\nu(x)\partial'_\mu\delta(x-x')\end{aligned}$$

È chiaro che questa situazione *non* si ripete ai ranghi più alti: per esempio per $k=2$ risulta

$$\begin{aligned}[][W_{\mu_1\mu_2}(x), W_{\nu_1\nu_2}(x')] = \frac{3}{2}\big(&W_{\mu_1\mu_2\nu_2}(x)\partial_{\nu_1}\delta(x-x') + W_{\mu_1\mu_2\nu_1}(x)\partial_{\nu_2}\delta(x-x') + \\ &- W_{\mu_2\nu_1\nu_2}(x)\partial'_{\mu_1}\delta(x-x') - W_{\mu_1\nu_1\nu_2}\partial'_{\mu_2}\delta(x-x')\big)\end{aligned}$$

Ciò mostra la peculiare struttura del gruppo di simmetrie costruito, in cui i diffeomorfismi (ovvero le simmetrie agenti sui campi di rango 1) costituiscono un nucleo centrale autocontenuto da cui si sviluppano le trasformazioni agenti sui campi di rango più alto, che al contrario coinvolgono l'intera torre dei campi rimescolando tutti i livelli tra loro.

2.3 Campi covarianti

In vista della costruzione di una teoria di campo che si basi sulla simmetria appena costruita e in cui gli $A^{\mu_1\cdots\mu_k}(x)$ fungano da campi di materia sarà necessario introdurre dei *nuovi* campi a più indici su M, caratterizzati dal fatto di appartenere all'algebra tensoriale *covariante* (anzichè a quella controvariante) definita su M. In altre parole, accanto ai campi $A^{\mu_1\cdots\mu_k}(x)$ definiti dalla procedura (1.36a) vogliamo introdurre dei campi con tutti gli indici bassi: $A_{\mu_1\dots\mu_k}(x)$.

Una strada possibile per la definizione di questi campi è quella di imporre che essi siano l'inverso degli $A^{(k)}$ rispetto a una certa metrica. In particolare notiamo che operando su una varietà differenziabile in coordinate locali è sempre disponibile la metrica indotta dal sistema di coordinate stesso prendendo come tensore metrico un δ di Kronecker; questo equivale a imporre, per esempio per i campi a due indici, che sia

$$A^{\mu\nu}(x)A_{\mu\rho}(x) = \delta^\nu_\rho \tag{2.11}$$

e più in generale

$$A^{\mu\nu_1\ldots\nu_{k-1}}(x)A_{\mu\rho_1\ldots\rho_{k-1}}(x) = \delta^{\nu_1\ldots\nu_{k-1}}_{\rho_1\ldots\rho_{k-1}} \tag{2.12}$$

Questa procedura, pur legittima, non è stata qui adottata perchè porta a delle leggi di trasformazione BRS per i campi covarianti $A_{(k)}$ che non sono *lineari* nei campi stessi. Infatti la variazione BRS degli $A^{(k)}$ coinvolge esplicitamente tutti i campi (a indici alti) di ordine più basso, e interagendo con la procedura di inversione ciò genera accoppiamenti indesiderati tra campi covarianti e controvarianti.

Si consideri ad esempio ancora il caso $k = 2$: applicando s ad ambo i membri della (2.11) e invertendo si ottiene

$$\begin{aligned}\mathrm{s}A_{\sigma\rho}(x) &= -A_{\sigma\nu}(x)A_{\mu\rho}(x)\,\mathrm{s}A^{\mu\nu}(x)\\ &= A_{\mu\rho}(x)\partial_\sigma C^\mu(x) + A_{\nu\sigma}(x)\partial_\rho C^\nu(x) +\\ &\quad + A_{\sigma\nu}(x)A_{\mu\rho}(x)A^\lambda(x)\partial_\lambda C^{\mu\nu}(x) + \ldots\end{aligned}$$

in cui, oltre ai primi due termini la cui presenza era da attendersi a priori date le caratteristiche tensoriali dei campi e delle trasformazioni considerate, figura come anticipato un ulteriore termine non lineare che coinvolge esplicitamente il campo controvariante a un indice $A^\lambda(x)$. È quindi evidente che se vogliamo mantenere l'idea di una legge di trasformazione BRS lineare occorre introdurre i campi covarianti in una maniera diversa.

Supponiamo allora di *troncare* la torre dei campi controvarianti (1.36a) ad un certo ordine finito N: in altre parole, supponiamo di costruire un modello in cui intervengano unicamente i campi $A^{\mu_1\cdots\mu_k}(x)$ (e $C^{\mu_1\cdots\mu_k}(x)$) con $k \leq N$. Sotto questa ipotesi è possibile definire dei campi $A_{\mu_1\ldots\mu_k}(x)$, con $1 \leq k \leq N$, imponendo che la loro legge di trasformazione BRS sia "duale" rispetto a quella degli $A^{(k)}$. Più in dettaglio, abbiamo visto che s agisce sugli $A^{(k)}$ nella maniera seguente:

$$\begin{aligned}&\mathrm{s}A^{(1)} = C^{(1)}\partial A^{(1)} - A^{(1)}\partial C^{(1)}\\ &\mathrm{s}A^{(2)} = C^{(1)}\partial A^{(2)} + C^{(2)}\partial A^{(1)} - A^{(1)}\partial C^{(2)} - A^{(2)}\partial C^{(1)}\\ &\vdots\\ &\mathrm{s}A^{(N-1)} = C^{(1)}\partial A^{(N-1)} + C^{(2)}\partial A^{(N-2)} + \ldots + C^{(N-1)}\partial A^{(1)} +\\ &\qquad\qquad - A^{(1)}\partial C^{(N-1)} - A^{(2)}\partial C^{(N-2)} - \ldots - A^{(N-1)}\partial C^{(1)}\\ &\mathrm{s}A^{(N)} = C^{(1)}\partial A^{(N)} + C^{(2)}\partial A^{(N-1)} + \ldots + C^{(N)}\partial A^{(1)} +\\ &\qquad\quad - A^{(N)}\partial C^{(1)} - A^{(N-1)}\partial C^{(2)} - \ldots - A^{(1)}\partial C^{(N)}\end{aligned}$$

Ora vogliamo organizzare i campi $A_{(k)}$ in modo tale che risulti

$$\begin{aligned}
\mathrm{s}A_{(1)} &= C^{(1)}\partial A_{(1)} + C^{(2)}\partial A_{(2)} + \ldots + C^{(N)}\partial A_{(N)} + \\
&\quad + A_{(1)}\partial C^{(1)} + A_{(2)}\partial C^{(2)} + \ldots + A_{(N)}\partial C^{(N)} \\
\mathrm{s}A_{(2)} &= C^{(1)}\partial A_{(2)} + C^{(2)}\partial A_{(3)} + \ldots + C^{(N-1)}\partial A_{(N)} + \\
&\quad + A_{(2)}\partial C^{(1)} + A_{(3)}\partial C^{(2)} + \ldots + A_{(N)}\partial C^{(N-1)} \\
&\vdots \\
\mathrm{s}A_{(N-1)} &= C^{(1)}\partial A_{(N-1)} + C^{(2)}\partial A_{(N)} + A_{(N-1)}\partial C^{(1)} + A_{(N)}\partial C^{(2)} \\
\mathrm{s}A_{(N)} &= C^{(1)}\partial A_{(N)} + A_{(N)}\partial C^{(1)}
\end{aligned}$$

In altre parole, la variazione dei campi di rango più alto $A_{(N)}$ deve coinvolgere esclusivamente i ghost di rango più basso $C^{(1)}$, e mano a mano che aumenta l'ordine dei campi entrano in gioco i ghost di rango superiore (fino ad arrivare alla legge di trasformazione degli $A_{(1)}$ che li coinvolge tutti).

In definitiva siamo portati a imporre la seguente legge di trasformazione per gli $A_{(k)}$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{s}A_{\mu_1\ldots\mu_k}(x) = \sum_{i=1}^{N-k+1} \Big(& C^{\sigma_1\ldots\sigma_i}(x)\partial_{\sigma_1}A_{\sigma_2\ldots\sigma_i\mu_1\ldots\mu_k}(x) + \\
& + k\delta^{\rho_1\ldots\rho_k}_{\mu_1\ldots\mu_k} A_{\sigma_1\ldots\sigma_i\rho_2\ldots\rho_k}(x)\partial_{\rho_1}C^{\sigma_1\ldots\sigma_i}(x)\Big)
\end{aligned} \tag{2.13}$$

È importante notare che, mentre la legge di trasformazione degli $A^{(k)}$ resta sempre la stessa a qualunque ordine N si decida di troncare la torre, la (2.13) per gli $A_{(k)}$ dipende esplicitamente da N; in particolare la variazione BRS di ciascun campo $A_{(k)}$ perde o acquista termini al diminuire o aumentare di N.

Con la posizione (2.13) si ha, ad esempio,

$$\mathrm{s}A_\mu(x) = \sum_{i=1}^{N}\Big(C^{\sigma_1\ldots\sigma_i}(x)\partial_{\sigma_1}A_{\sigma_2\ldots\sigma_i\mu}(x) + A_{\sigma_1\ldots\sigma_i}(x)\partial_\mu C^{\sigma_1\ldots\sigma_i}(x)\Big)$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{s}A_{\mu_1\mu_2}(x) = \sum_{i=1}^{N-1}\Big(& C^{\sigma_1\ldots\sigma_i}(x)\partial_{\sigma_1}A_{\sigma_2\ldots\sigma_i\mu_1\mu_2}(x) + A_{\sigma_1\ldots\sigma_i\mu_2}(x)\partial_{\mu_1}C^{\sigma_1\ldots\sigma_i}(x) + \\
& + A_{\sigma_1\ldots\sigma_i\mu_1}(x)\partial_{\mu_2}C^{\sigma_1\ldots\sigma_i}(x)\Big)
\end{aligned}$$

e così via, come richiesto.

Occorre ovviamente verificare che sia $\mathrm{s}^2 = 0$. Partendo dal caso più semplice ($k = N$), vediamo che

$$\mathrm{s}A_{\mu_1\ldots\mu_N}(x) = C^\sigma(x)\partial_\sigma A_{\mu_1\ldots\mu_N}(x) + N\delta^{\rho_1\ldots\rho_N}_{\mu_1\ldots\mu_N}A_{\sigma\rho_2\ldots\rho_N}(x)\partial_{\rho_1}C^\sigma(x)$$

e dunque

$$
\begin{aligned}
\mathrm{s}^2 A_{\mu_1\ldots\mu_N}(x) &= \mathrm{s}C^\sigma(x)\partial_\sigma A_{\mu_1\ldots\mu_N}(x) - C^\sigma(x)\partial_\sigma\,\mathrm{s}A_{\mu_1\ldots\mu_N}(x) + \\
&\quad + N\delta^{\rho_1\ldots\rho_N}_{\mu_1\ldots\mu_N}(\mathrm{s}A_{\sigma\rho_2\ldots\rho_N}(x)\partial_{\rho_1}C^\sigma(x) + A_{\sigma\rho_2\ldots\rho_N}(x)\partial_{\rho_1}\,\mathrm{s}C^\sigma(x))
\end{aligned}
$$

Svolgendo i conti si vede che la maggior parte dei termini si eliminano a coppie e come unici superstiti restano

$$
= N\delta^{\rho_1\ldots\rho_N}_{\mu_1\ldots\mu_N}\Big(N\delta^{\nu_1\ldots\nu_N}_{\sigma\rho_2\ldots\rho_N}A_{\lambda\nu_2\ldots\nu_N}\partial_{\nu_1}C^\lambda\partial_{\rho_1}C^\sigma + A_{\sigma\rho_2\ldots\rho_N}(x)\partial_{\rho_1}C^\lambda\partial_\lambda C^\sigma\Big) \tag{2.14}
$$

Scrivendo

$$
N\delta^{\rho_1\ldots\rho_N}_{\mu_1\ldots\mu_N} = \sum_{i=1}^{N}\delta^{\rho_2\ldots\rho_N}_{\mu_1\ldots\widehat{\mu_i}\ldots\mu_N}\delta^{\rho_1}_{\mu_i} \qquad \text{e} \qquad N\delta^{\nu_1\ldots\nu_N}_{\sigma\rho_2\ldots\rho_N} = \sum_{j=1}^{N}\delta^{\nu_1\ldots\widehat{\nu_j}\ldots\nu_N}_{\rho_2\ldots\rho_N}\delta^{\nu_j}_{\sigma}
$$

e sostituendo nella (2.14):

$$
\mathrm{s}^2 A_{\mu_1\ldots\mu_N}(x) = \sum_{i,j=1}^{N}\delta^{\nu_1\ldots\widehat{\nu_j}\ldots\nu_N}_{\mu_1\ldots\widehat{\mu_i}\ldots\mu_N}A_{\lambda\nu_2\ldots\nu_N}\partial_{\nu_1}C^\lambda\partial_{\mu_i}C^{\nu_j} + A_{\sigma\mu_1\ldots\widehat{\mu_i}\ldots\mu_N}(x)\partial_{\mu_i}C^\lambda\partial_\lambda C^\sigma
$$

Ma il primo termine è nullo (la stessa coppia di indici appare in espressioni simmetriche e antisimmetriche) a meno che non sia $j = 1$, nel qual caso coincide proprio con l'opposto del secondo; se ne conclude che $\mathrm{s}^2 A_{\mu_1\ldots\mu_N}(x) = 0$.

Questo risultato si estende poi facilmente al caso generale $k < N$: è sufficiente osservare che per come è strutturata la legge (2.13) ad ogni passo verso il basso nella torre dei campi si aggiunge una coppia di termini che dipendono dai ghost di rango successivo, la cui variazione BRS (al netto delle semplificazioni) produce proprio i termini necessari a cancellare i termini superstiti dal livello precedente, con meccanismi simili a quello appena visto.

Una volta introdotti i campi $A_{\mu_1\ldots\mu_k}(x)$ con la legge di trasformazione (2.13) è immediato estendere al nuovo insieme di campi l'espressione dell'operatore BRS (2.8), definire i funzionali ausiliari $R_{\rho_1\ldots\rho_k\mu_1\ldots\mu_k}(x,x')$ associati alla nuova rappresentazione definita dagli $A_{\rho_1\ldots\rho_k}(x)$ e i corrispondenti operatori di Ward.

2.4 Connessioni

In vista dell'introduzione di *interazioni* tra i campi sopra definiti e seguendo il paradigma proprio delle teorie di gauge, siamo portati a ipotizzare che sulla varietà spazio-temporale M sia definita una *connessione* a valori nell'algebra di Lie associata al gruppo di simmetria considerato e un corrispondente operatore di *derivata covariante*: in questa sezione chiariamo la natura di tale connessione e le sue proprietà di trasformazione.

Cominciamo considerando il caso particolare in cui nel modello figurano solo i campi a un indice ($N = 1$), e procediamo con le definizioni usuali: supponiamo cioè che su M sia definito un operatore differenziale D_ν la cui azione in componenti sui campi $A^\mu(x)$ e $A_\mu(x)$ è data da

$$D_\nu A^\mu(x) := \partial_\nu A^\mu(x) + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}(x) A^\lambda(x) \tag{2.15}$$

e

$$D_\nu A_\mu(x) := \partial_\nu A_\mu(x) - \Gamma^\lambda_{\nu\mu}(x) A_\lambda(x) \tag{2.16}$$

A questo punto è necessario verificare la coerenza dello schema calcolando l'azione dell'operatore di Slavnov separatamente sui due membri delle (2.15)–(2.16) e verificandone l'uguaglianza.

Consideriamo anzitutto la (2.15): ci si aspetta che la variazione BRS di un oggetto con un indice controvariante e un indice covariante sia data da

$$\mathrm{s} D_\nu A^\mu(x) = C^\lambda(x)\partial_\lambda(D_\nu A^\mu(x)) + D_\lambda A^\mu(x)\partial_\nu C^\lambda(x) - D_\nu A^\lambda(x)\partial_\lambda C^\mu(x) \tag{2.17}$$

La novità rispetto alla legge di trasformazione (2.1b) è la presenza del termine $D_\lambda A^\mu(x)\partial_\nu C^\lambda(x)$, che è proprio quello che ci si aspetta per un tensore con un indice covariante in più.

D'altra parte, agendo con s sulla (2.15) si ottiene[1]

$$\begin{aligned}
\mathrm{s} D_\nu A^\mu &= \partial_\nu(\mathrm{s}A^\mu) + \mathrm{s}\Gamma^\mu_{\nu\lambda} A^\lambda + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}\, \mathrm{s}A^\lambda \\
&= \partial_\nu(C^\rho\partial_\rho A^\mu - A^\rho\partial_\rho C^\mu) + \mathrm{s}\Gamma^\mu_{\nu\lambda} A^\lambda + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}(C^\rho\partial_\rho A^\lambda - A^\rho\partial_\rho C^\lambda) \\
&= \partial_\nu C^\rho\partial_\rho A^\mu + C^\rho\partial_\nu\partial_\rho A^\mu - \partial_\nu A^\rho\partial_\rho C^\mu - A^\rho\partial_\nu\partial_\rho C^\mu + \\
&\quad + \mathrm{s}\Gamma^\mu_{\nu\lambda} A^\lambda + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} C^\rho\partial_\rho A^\lambda - \Gamma^\mu_{\nu\lambda} A^\rho\partial_\rho C^\lambda
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Imponendo l'uguaglianza tra le due espressioni (2.17) e (2.18) si ottiene un vincolo sulla legge di trasformazione dei coefficienti di connessione, che si concretizza nell'identità

$$\mathrm{s}\Gamma^\mu_{\nu\lambda} A^\lambda = C^\lambda\partial_\lambda\Gamma^\mu_{\nu\rho} A^\rho + \Gamma^\mu_{\lambda\rho} A^\rho\partial_\nu C^\lambda + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} A^\rho\partial_\rho C^\lambda - \Gamma^\lambda_{\nu\rho} A^\rho\partial_\lambda C^\mu + A^\rho\partial_\nu\partial_\rho C^\mu$$

ovvero

$$\begin{aligned}
\mathrm{s}\Gamma^\mu_{\nu\rho}(x) &= C^\lambda(x)\partial_\lambda\Gamma^\mu_{\nu\rho}(x) - \Gamma^\lambda_{\nu\rho}(x)\partial_\lambda C^\mu(x) + \Gamma^\mu_{\lambda\rho}(x)\partial_\nu C^\lambda(x) + \\
&\quad + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}(x)\partial_\rho C^\lambda(x) + \partial_\nu\partial_\rho C^\mu(x)
\end{aligned} \tag{2.19}$$

È facile vedere che alla stessa legge di trasformazione si perviene applicando il medesimo algoritmo alla (2.16); dunque da un punto di vista algebrico la situazione nel caso $N = 1$ è chiara e riproduce esattamente ciò che avviene nelle teorie invarianti per trasformazioni di coordinate generali.

[1] Nel seguito sopprimeremo spesso la dipendenza spazio-temporale dei campi per alleggerire la notazione, ripristinandola nelle formule finali.

Come inciso, si noti che se la connessione è *simmetrica* ($\Gamma^{\mu}_{\nu\rho} = \Gamma^{\mu}_{\rho\nu}$) le leggi di trasformazione (2.1) si possono esprimere indifferentemente con le derivate parziali o le derivate covarianti: risulta infatti

$$\begin{aligned} C^{\lambda} D_{\lambda} A^{\mu} - A^{\lambda} D_{\lambda} C^{\mu} &= C^{\lambda} \partial_{\lambda} A^{\mu} + C^{\lambda} \Gamma^{\mu}_{\lambda\sigma} A^{\sigma} - A^{\lambda} \partial_{\lambda} C^{\mu} - A^{\lambda} \Gamma^{\mu}_{\lambda\sigma} C^{\sigma} \\ &= C^{\lambda} \partial_{\lambda} A^{\mu} - A^{\lambda} \partial_{\lambda} C^{\mu} \end{aligned}$$

e similmente

$$C^{\lambda} D_{\lambda} C^{\mu} = C^{\lambda} \partial_{\lambda} C^{\mu} + C^{\lambda} \Gamma^{\mu}_{\lambda\sigma} C^{\sigma} = C^{\lambda} \partial_{\lambda} C^{\mu}$$

Inoltre si noti che dal punto di vista dei cambi di carte su M, la quantità $\mathrm{s}C^{\mu}(x)$ è un tensore a tutti gli effetti (pur essendo definito tramite derivate parziali e non derivate covarianti): questo in virtù del fatto che i ghost sono campi di Grassmann. Infatti, il comportamento di $\mathrm{s}C^{\mu}(x)$ a seguito del cambio di coordinate $x^{\mu} \to \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}$ su M è il seguente:

$$\mathrm{s}C^{\mu} = C^{\nu} \partial_{\nu} C^{\mu} \to \Lambda^{\nu}{}_{\rho} C^{\rho} (\Lambda^{-1})^{\eta}{}_{\nu} \partial_{\eta} (\Lambda^{\mu}{}_{\lambda} C^{\lambda})$$

ovvero

$$\Lambda^{\nu}{}_{\rho} C^{\rho} (\Lambda^{-1})^{\eta}{}_{\nu} \partial_{\eta} \Lambda^{\mu}{}_{\lambda} C^{\lambda} + \Lambda^{\nu}{}_{\rho} C^{\rho} (\Lambda^{-1})^{\eta}{}_{\nu} \Lambda^{\mu}{}_{\lambda} \partial_{\eta} C^{\lambda}$$

Nel primo termine, il prodotto tra matrici è simmetrico per scambio di λ e ρ ma è saturato con l'espressione antisimmetrica $C^{\lambda} C^{\rho}$, e pertanto si annulla. Il secondo termine è, compiute le necessarie semplificazioni, proprio ciò che ci si aspetta:

$$= C^{\rho} \delta^{\eta}_{\rho} \Lambda^{\mu}{}_{\lambda} \partial_{\eta} C^{\lambda} = \Lambda^{\mu}{}_{\lambda} C^{\rho} \partial_{\rho} C^{\lambda} = \Lambda^{\mu}{}_{\lambda}\, \mathrm{s}C^{\lambda}$$

come volevasi.

Consideriamo ora il caso, di gran lunga più interessante, in cui nel modello sono presenti campi di rango maggiore di 1, per esempio il campo controvariante a due indici: $A^{\mu_1\mu_2}(x)$. In tale situazione è chiaro che non è sufficiente un'estensione banale della legge (2.15):

$$D_{\nu} A^{\mu_1\mu_2}(x) \overset{?}{:=} \partial_{\nu} A^{\mu_1\mu_2}(x) + \Gamma^{\mu_1}_{\nu\lambda}(x) A^{\lambda\mu_2}(x) + \Gamma^{\mu_2}_{\nu\lambda}(x) A^{\mu_1\lambda}(x)$$

Infatti il calcolo di $\mathrm{s}D_{\nu} A^{\mu_1\mu_2}(x)$ (e più precisamente del termine $\partial_{\nu}\, \mathrm{s}A^{\mu_1\mu_2}(x)$) genera un addendo del tipo $A^{(1)} \partial\partial C^{(2)}$, in cui cioè figurano le derivate seconde del ghost di secondo ordine, che non può essere compensato da nessun addendo proveniente dalle variazioni delle connessioni (2.19). Per mantenere le proprietà di covarianza dei campi diventa quindi necessario introdurre, oltre alla connessione $\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}(x)$, delle ulteriori connessioni "generalizzate" a più indici che dipendono dalle derivate seconde dei ghost di rango più alto.

Ciò stante, definiamo la derivata covariante per i campi a due indici nella maniera seguente:

$$D_{\nu} A^{\mu_1\mu_2}(x) := \partial_{\nu} A^{\mu_1\mu_2}(x) + \Gamma^{\mu_1}_{\nu\lambda}(x) A^{\lambda\mu_2}(x) + \Gamma^{\mu_2}_{\nu\lambda}(x) A^{\mu_1\lambda}(x) + \Gamma^{\mu_1\mu_2}_{\nu\lambda}(x) A^{\lambda}(x)$$

o, con una notazione più compatta,

$$D_\nu A^{\mu_1\mu_2}(x) = \delta^{\mu_1\mu_2}_{\rho_1\rho_2}\left(\partial_\nu A^{\mu_1\mu_2}(x) + 2\Gamma^{\rho_2}_{\nu\lambda}(x)A^{\lambda\rho_1}(x) + \Gamma^{\rho_1\rho_2}_{\nu\lambda}(x)A^{\lambda}(x)\right) \tag{2.20}$$

Imponendo una condizione di consistenza sul risultato di $\mathrm{s}D_\nu A^{\mu_1\mu_2}(x)$, analogamente a quanto fatto in precedenza nel caso $N = 1$, si può ricavare la variazione $\mathrm{s}\Gamma^{\rho_1\rho_2}_{\nu\lambda}(x)$ delle nuove connessioni di ordine superiore: si ottiene così

$$\begin{aligned}\mathrm{s}\Gamma^{\mu_1\mu_2}_{\nu\lambda}(x) = \delta^{\mu_1\mu_2}_{\rho_1\rho_2}\Big(&2(C^{\tau\rho_1}(x)\partial_\tau\Gamma^{\rho_2}_{\nu\lambda}(x) + \Gamma^{\rho_1}_{\tau\lambda}(x)\partial_\nu C^{\tau\rho_2}(x) + \Gamma^{\rho_1}_{\nu\tau}(x)\partial_\lambda C^{\tau\rho_2}(x) + \\ &- \Gamma^{\tau\rho_1}_{\nu\lambda}(x)\partial_\tau C^{\rho_2}(x)) + C^\tau(x)\partial_\tau\Gamma^{\rho_1\rho_2}_{\nu\lambda}(x) + \Gamma^{\rho_1\rho_2}_{\tau\lambda}(x)\partial_\nu C^\tau(x) + \\ &+ \Gamma^{\rho_1\rho_2}_{\nu\tau}(x)\partial_\lambda C^\tau(x) - \Gamma^{\tau}_{\nu\lambda}(x)\partial_\tau C^{\rho_1\rho_2}(x)\Big) + \partial_\nu\partial_\lambda C^{\mu_1\mu_2}(x)\end{aligned} \tag{2.21}$$

Anche in questo caso risulta che $\mathrm{s}A^{(2)}$ e $\mathrm{s}C^{(2)}$ si possono esprimere indifferentemente con le derivate parziali o covarianti, a patto che anche la nuova connessione sia simmetrica negli indici bassi:

$$\Gamma^{\mu_1\mu_2}_{\nu\lambda} = \Gamma^{\mu_1\mu_2}_{\lambda\nu}$$

A questo punto è chiaro come si debba procedere nel caso generale: prendendo in considerazione il generico campo controvariante a k indici $A^{\mu_1\cdots\mu_k}(x)$, poniamo

$$\begin{aligned}D_\nu A^{\mu_1\cdots\mu_k}(x) &:= \partial_\nu A^{\mu_1\cdots\mu_k}(x) + \delta^{\mu_1\cdots\mu_k}_{\rho_1\cdots\rho_k}\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k}{i}\Gamma^{\rho_{i+1}\cdots\rho_k}_{\nu\lambda}(x)A^{\lambda\rho_1\cdots\rho_i}(x) \\ &= \delta^{\mu_1\cdots\mu_k}_{\rho_1\cdots\rho_k}\left(\partial_\nu A^{\rho_1\cdots\rho_k}(x) + \sum_{i=0}^{k-1}\binom{k}{i}\Gamma^{\rho_{i+1}\cdots\rho_k}_{\nu\lambda}(x)A^{\lambda\rho_1\cdots\rho_i}(x)\right)\end{aligned} \tag{2.22}$$

Sotto l'azione del differenziale BRS il primo membro dovrà trasformarsi come

$$\begin{aligned}\mathrm{s}D_\nu A^{\mu_1\cdots\mu_k}(x) = \delta^{\mu_1\cdots\mu_k}_{\rho_1\cdots\rho_k}\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k}{i}&\left(C^{\lambda\rho_1\cdots\rho_i}(x)\partial_\lambda D_\nu A^{\rho_{i+1}\cdots\rho_k}(x)+\right. \\ &\left.+\partial_\nu C^{\lambda\rho_1\cdots\rho_i}(x)D_\lambda A^{\rho_{i+1}\cdots\rho_k}(x) - D_\nu A^{\lambda\rho_1\cdots\rho_i}(x)\partial_\lambda C^{\rho_{i+1}\cdots\rho_k}(x)\right)\end{aligned} \tag{2.23}$$

Imponendo questa condizione si ottiene un'espressione per la variazione BRS delle connessioni generalizzate ad un qualunque numero di indici che è la generalizzazione diretta delle (2.19) e (2.21) per i casi $k = 1$ e $k = 2$:

$$\begin{aligned}\mathrm{s}\Gamma^{\mu_1\cdots\mu_k}_{\nu\lambda}(x) = \delta^{\mu_1\cdots\mu_k}_{\rho_1\cdots\rho_k}\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}\Big(&C^{\eta\rho_{i+1}\cdots\rho_k}(x)\partial_\eta\Gamma^{\rho_1\cdots\rho_i}_{\nu\lambda}(x) + \\ &+ \partial_\nu C^{\eta\rho_{i+1}\cdots\rho_k}(x)\Gamma^{\rho_1\cdots\rho_i}_{\eta\lambda}(x) + \partial_\lambda C^{\eta\rho_{i+1}\cdots\rho_k}(x)\Gamma^{\rho_1\cdots\rho_i}_{\nu\eta}(x) + \\ &- \partial_\eta C^{\rho_1\cdots\rho_i}(x)\Gamma^{\eta\rho_{i+1}\cdots\rho_k}_{\nu\lambda}(x)\Big) + \partial_\nu\partial_\lambda C^{\mu_1\cdots\mu_k}(x)\end{aligned} \tag{2.24}$$

Similmente per quanto riguarda l'azione di D_ν sul generico campo covariante a k indici si pone

$$\begin{aligned}D_\nu A_{\mu_1\ldots\mu_k}(x) &:= \partial_\nu A_{\mu_1\ldots\mu_k}(x) - \delta^{\rho_1\ldots\rho_k}_{\mu_1\ldots\mu_k}\sum_{i=1}^{N-k+1}\Gamma^{\sigma_1\ldots\sigma_i}_{\nu\rho_1}(x)A_{\rho_2\ldots\rho_k\sigma_1\ldots\sigma_i}(x)\\ &= \delta^{\rho_1\ldots\rho_k}_{\mu_1\ldots\mu_k}\left(\partial_\nu A_{\rho_1\ldots\rho_k}(x) - \sum_{i=1}^{N-k+1}\Gamma^{\sigma_1\ldots\sigma_i}_{\nu\rho_1}(x)A_{\rho_2\ldots\rho_k\sigma_1\ldots\sigma_i}(x)\right)\end{aligned} \tag{2.25}$$

e imponendo che risulti

$$\begin{aligned}\mathrm{s}D_\lambda A_{\mu_1\ldots\mu_k}(x) = \delta^{\nu_1\ldots\nu_k}_{\mu_1\ldots\mu_k}\sum_{i=1}^{N-k+1}\big(&C^{\rho_1\ldots\rho_i}(x)\partial_{\rho_1}D_\lambda A_{\rho_2\ldots\rho_i\nu_1\ldots\nu_k}(x) +\\ &+ \partial_\lambda C^{\rho_1\ldots\rho_k}(x)D_{\rho_1}A_{\rho_2\ldots\rho_i}(x) + \partial_{\nu_1}C^{\rho_1\ldots\rho_i}(x)D_\lambda A_{\rho_1\ldots\rho_i\nu_2\ldots\nu_k}\big)\end{aligned} \tag{2.26}$$

si ritrovano le medesime condizioni (2.24).

È importante sottolineare che due espressioni quali ad esempio $D_{\mu_k}A^{\mu_1\cdots\mu_k}(x)$ e $A^{\mu_1\cdots\mu_{k-1}}(x)$, pur equivalenti tra loro come contenuto tensoriale, non sono affatto equivalenti dal punto di vista dell'algebra di simmetria: infatti la variazione BRS della prima espressione coinvolgerà esplicitamente, in virtù della (2.23), i ghost di rango k mentre ovviamente $\mathrm{s}A^{\mu_1\cdots\mu_{k-1}}(x)$ dipende al massimo da $C^{(k-1)}$. Lo stesso discorso vale per gli indici covarianti: $D_{\mu_k}A_{\mu_1\ldots\mu_{k-1}}(x)$ e $A_{\mu_1\ldots\mu_k}(x)$ hanno leggi di trasformazione BRS diverse. Se ne conclude che, contrariamente a quanto avviene nelle normali teorie di campo su spazio piatto, non ha senso in questo approccio usare le derivate covarianti per mettere in relazione tra loro campi di rango tensoriale diverso.

2.5 Curvature

Calcoliamo ora la curvatura della connessione introdotta. Supporremo d'ora in poi sistematicamente di operare con una connessione *simmetrica* nei due indici bassi (cioè, priva di torsione), oltre che ovviamente in tutti gli indici alti (che sono simmetrici per costruzione).

Quando $N = 1$ si avrà, come ben noto,

$$\begin{aligned}\left[D_\rho, D_\nu\right] A^\mu(x) = \partial_\rho\Gamma^\mu_{\nu\lambda}(x)A^\lambda(x) - \partial_\nu\Gamma^\mu_{\rho\lambda}(x)A^\lambda(x) +&\\ + \Gamma^\mu_{\rho\tau}(x)\Gamma^\tau_{\nu\lambda}(x)A^\lambda(x) - \Gamma^\mu_{\rho\tau}(x)\Gamma^\tau_{\nu\lambda}(x)A^\lambda(x)&\end{aligned}$$

Posto $\left[D_\rho, D_\nu\right] A^\mu(x) = R^\mu_{\lambda\rho\nu}(x)A^\lambda(x)$, resta così definito il *tensore di curvatura* (o tensore di Riemann) della geometria differenziale:

$$R^\mu_{\lambda\rho\nu}(x) := \partial_\rho\Gamma^\mu_{\nu\lambda}(x) - \partial_\nu\Gamma^\mu_{\rho\lambda}(x) + \Gamma^\mu_{\rho\tau}(x)\Gamma^\tau_{\nu\lambda}(x) - \Gamma^\mu_{\nu\tau}(x)\Gamma^\tau_{\rho\lambda}(x) \tag{2.27}$$

Nel primo caso non banale ($N = 2$), per i campi a due indici si ha

$$\begin{aligned}[D_\rho, D_\nu]\, A^{\mu_1\mu_2}(x) = {} & \partial_{[\rho}\Gamma^{\mu_1}_{\nu]\lambda}(x)A^{\lambda\mu_2}(x) + \partial_{[\rho}\Gamma^{\mu_2}_{\nu]\lambda}(x)A^{\mu_1\lambda}(x) + \partial_{[\rho}\Gamma^{\mu_1\mu_2}_{\nu]\lambda}(x)A^{\lambda}(x) + \\ & + \Gamma^{\mu_1}_{\tau[\rho}(x)\Gamma^{\tau}_{\nu]\lambda}(x)A^{\lambda\mu_2}(x) + \Gamma^{\mu_1}_{\tau[\rho}(x)\Gamma^{\tau\mu_2}_{\nu]\lambda}(x)A^{\lambda}(x) + \\ & + \Gamma^{\mu_2}_{\tau[\rho}(x)\Gamma^{\tau}_{\nu]\lambda}(x)A^{\mu_1\lambda}(x) + \Gamma^{\mu_2}_{\tau[\rho}(x)\Gamma^{\mu_1\tau}_{\nu]\lambda}(x)A^{\lambda}(x) + \\ & + \Gamma^{\mu_1\mu_2}_{\tau[\rho}(x)\Gamma^{\tau}_{\nu]\lambda}(x)A^{\lambda}(x)\end{aligned} \tag{2.28}$$

dove si è introdotta la notazione compatta $A_{[\alpha}B_{\beta]} := A_\alpha B_\beta - A_\beta B_\alpha$ per rendere maneggiabile il numero degli addendi prodotti.

La (2.28) si può riscrivere come

$$\begin{aligned}[D_\rho, D_\nu]\, A^{\mu_1\mu_2}(x) &= \left(\partial_{[\rho}\Gamma^{\mu_2}_{\nu]\lambda} + \Gamma^{\mu_2}_{\tau[\rho}\Gamma^{\tau}_{\nu]\lambda}\right)A^{\mu_1\lambda} + \left(\partial_{[\rho}\Gamma^{\mu_1}_{\nu]\lambda} + \Gamma^{\mu_1}_{\tau[\rho}\Gamma^{\tau}_{\nu]\lambda}\right)A^{\lambda\mu_2} + \\ &\quad + \left(\partial_{[\rho}\Gamma^{\mu_1\mu_2}_{\nu]\lambda} + \Gamma^{\mu_1}_{\tau[\rho}\Gamma^{\tau\mu_2}_{\nu]\lambda} + \Gamma^{\mu_2}_{\tau[\rho}\Gamma^{\mu_1\tau}_{\nu]\lambda} + \Gamma^{\mu_1\mu_2}_{\tau[\rho}\Gamma^{\tau}_{\nu]\lambda}\right)A^{\lambda} \\ &= R^{\mu_2}_{\lambda\rho\nu}(x)A^{\mu_1\lambda}(x) + R^{\mu_1}_{\lambda\rho\nu}(x)A^{\lambda\mu_2}(x) + R^{\mu_1\mu_2}_{\lambda\rho\nu}(x)A^{\lambda}(x)\end{aligned}$$

in cui si è posto

$$R^{\mu_1\mu_2}_{\lambda\rho\nu}(x) := \partial_{[\rho}\Gamma^{\mu_1\mu_2}_{\nu]\lambda}(x) + \Gamma^{\mu_1}_{\tau[\rho}(x)\Gamma^{\tau\mu_2}_{\nu]\lambda}(x) + \Gamma^{\mu_2}_{\tau[\rho}(x)\Gamma^{\mu_1\tau}_{\nu]\lambda}(x) + \Gamma^{\mu_1\mu_2}_{\tau[\rho}(x)\Gamma^{\tau}_{\nu]\lambda}(x) \tag{2.29}$$

per analogia con la (2.27)

$$R^{\mu}_{\lambda\rho\nu}(x) = \partial_{[\rho}\Gamma^{\mu}_{\nu]\lambda}(x) + \Gamma^{\mu}_{\tau[\rho}(x)\Gamma^{\tau}_{\nu]\lambda}(x)$$

Resta cioè definito su M un nuovo tensore (con un indice controvariante "in più") che generalizza il tensore di curvatura di Riemann, il cui contenuto di informazione diventa insufficiente per pilotare completamente la struttura geometrica nel nuovo ambito. Si noti che la derivata covariante dei campi a un indice solo ($A^\mu(x)$) continua a coinvolgere solo $R^{\mu}_{\lambda\rho\nu}(x)$.

Passando al caso generale, l'espressione del generico tensore di curvatura a k indici controvarianti $R^{\mu_1\ldots\mu_k}_{\lambda\rho\nu}(x)$ si ricava applicando il medesimo algoritmo, cioè calcolando il commutatore $[D_\rho, D_\nu]$ sul campo controvariante di rango k. In altre parole, definiamo

$$[D_\rho, D_\nu]\, A^{\mu_1\ldots\mu_k}(x) = \delta^{\mu_1\ldots\mu_k}_{\rho_1\ldots\rho_k} \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} R^{\rho_1\ldots\rho_i}_{\lambda\rho\nu}(x)A^{\lambda\rho_{i+1}\ldots\rho_k}(x)$$

con

$$\begin{aligned}R^{\mu_1\ldots\mu_i}_{\lambda\rho\nu}(x) = {} & \partial_\rho\Gamma^{\mu_1\ldots\mu_i}_{\nu\lambda}(x) - \partial_\nu\Gamma^{\mu_1\ldots\mu_i}_{\rho\lambda}(x) + \\ & + \delta^{\mu_1\ldots\mu_i}_{\rho_1\ldots\rho_i} \sum_{j=1}^{i} \binom{i}{j} \left(\Gamma^{\rho_1\ldots\rho_j}_{\tau\rho}(x)\Gamma^{\tau\rho_{j+1}\ldots\rho_i}_{\nu\lambda}(x) - \Gamma^{\rho_1\ldots\rho_j}_{\tau\nu}(x)\Gamma^{\tau\rho_{j+1}\ldots\rho_i}_{\rho\lambda}(x)\right)\end{aligned} \tag{2.30}$$

ovvero, in forma più compatta,

$$R^{\mu_1 \dots \mu_i}_{\lambda\rho\nu}(x) = \delta^{\mu_1 \dots \mu_i}_{\rho_1 \dots \rho_i} \Big(\partial_\rho \Gamma^{\rho_1 \dots \rho_i}_{\nu\lambda}(x) - \partial_\nu \Gamma^{\rho_1 \dots \rho_i}_{\rho\lambda}(x) + \\ + \sum_{j=1}^{i} \binom{i}{j} \big(\Gamma^{\rho_1 \dots \rho_j}_{\tau\rho}(x) \Gamma^{\rho_{j+1} \dots \rho_i \tau}_{\nu\lambda}(x) - \Gamma^{\rho_1 \dots \rho_j}_{\tau\nu}(x) \Gamma^{\rho_{j+1} \dots \rho_i \tau}_{\rho\lambda}(x) \big) \Big) \quad (2.31)$$

Dall'identità di Jacobi per i D_μ possiamo ora ricavare le identità di Bianchi (generalizzate) cui soddisfano i nuovi tensori di curvatura introdotti. Per quanto riguarda la prima identità di Bianchi si ha:

$$R^{\mu_1 \dots \mu_i}_{\lambda\rho\nu}(x) + R^{\mu_1 \dots \mu_i}_{\rho\nu\lambda}(x) + R^{\mu_1 \dots \mu_i}_{\nu\lambda\rho}(x) = 0$$

e per la seconda:

$$D_\tau R^{\mu_1 \dots \mu_i}_{\lambda\rho\nu}(x) + D_\nu R^{\mu_1 \dots \mu_i}_{\lambda\tau\rho}(x) + D_\rho R^{\mu_1 \dots \mu_i}_{\lambda\nu\tau}(x) = 0$$

È immediato calcolare la variazione BRS delle curvature (2.30): si ha

$$\mathrm{s} R^{\mu_1 \dots \mu_i}_{\lambda\rho\nu}(x) = \delta^{\mu_1 \dots \mu_i}_{\rho_1 \dots \rho_i} \sum_{j=1}^{i} \binom{i}{j} \Big(C^{\tau\rho_{j+1} \dots \rho_i}(x) \partial_\tau R^{\rho_1 \dots \rho_j}_{\lambda\rho\nu}(x) + \\ + \partial_\lambda C^{\tau\rho_{j+1} \dots \rho_i}(x) R^{\rho_1 \dots \rho_j}_{\tau\rho\nu}(x) + \partial_\rho C^{\tau\rho_{j+1} \dots \rho_i}(x) R^{\rho_1 \dots \rho_j}_{\lambda\tau\nu}(x) + \\ + \partial_\nu C^{\tau\rho_{j+1} \dots \rho_i}(x) R^{\rho_1 \dots \rho_j}_{\lambda\rho\tau}(x) - \partial_\tau C^{\rho_1 \dots \rho_j}(x) R^{\tau\rho_{j+1} \dots \rho_i}_{\lambda\rho\nu}(x) \Big) \quad (2.32)$$

Dato il tensore di Riemann (2.27) (e ricordando che siamo in assenza di metrica) si possono definire due ulteriori tensori significativi tramite contrazione dell'indice alto μ con uno tra i due indici λ e ρ (la contrazione con ν riproduce quest'ultimo oggetto a meno di un segno, per l'antisimmetria di R). In particolare nel secondo caso si ottiene quello che viene generalmente chiamato il *tensore di Ricci*:

$$\mathcal{R}_{\lambda\nu}(x) := R^{\mu}_{\lambda\mu\nu}(x)$$

Similmente per i tensori di curvatura a più indici (2.30), stante la loro totale simmetria negli indici controvarianti, possiamo ancora definire essenzialmente *due sole* contrazioni significative tra uno qualunque degli indici alti (per esempio l'ultimo) e gli indici λ o ρ. In questo secondo caso ci riferiremo al risultato ancora con il nome di tensore di Ricci (generalizzato):

$$\mathcal{R}^{\mu_1 \dots \mu_{i-1}}_{\lambda\nu}(x) := R^{\mu_1 \dots \mu_i}_{\lambda\mu_i\nu}(x) \quad (2.33)$$

È evidente dalla (2.32) che la variazione BRS del tensore di Ricci (2.33) sarà data da

$$\mathrm{s}\mathcal{R}^{\mu_1 \dots \mu_{i-1}}_{\lambda\nu}(x) = \delta^{\mu_1 \dots \mu_{i-1}}_{\rho_1 \dots \rho_{i-1}} \sum_{j=1}^{i-1} \binom{i-1}{j} \Big(C^{\tau\mu_{j+1} \dots \mu_{i-1}}(x) \partial_\tau \mathcal{R}^{\mu_1 \dots \mu_j}_{\lambda\nu}(x) + \\ \partial_\lambda C^{\tau\mu_{j+1} \dots \mu_{i-1}}(x) \mathcal{R}^{\mu_1 \dots \mu_j}_{\tau\nu}(x) + \partial_\nu C^{\tau\mu_{j+1} \dots \mu_{i-1}}(x) \mathcal{R}^{\mu_1 \dots \mu_j}_{\lambda\tau}(x) \Big) \quad (2.34)$$

Capitolo 3

Co-omologia locale dell'operatore BRS

In vista di possibili applicazioni fisiche è importante stabilire se le trasformazioni di simmetria costruite nei capitoli precedenti possano effettivamente essere incorporate in una teoria quantistica di campo in maniera consistente: tale richiesta infatti rappresenta già di per sè una questione non banale, e l'approccio BRS ci fornisce a tal proposito un potente strumento.

Scopo di questo Capitolo è lo studio della co-omologia dell'operatore BRS sullo spazio Ω delle funzioni locali dei campi, o spazio di Fock; il motivo di tale interesse diventerà chiaro nella sezione 4.1, cui rimandiamo per una discussione generale del problema.

Per una maggiore compattezza delle formule, nel seguito utilizzeremo spesso l'etichetta generica $\Phi(x)$ per indicare uno qualunque tra i campi introdotti finora ($A^{\mu_1 \dots \mu_k}(x)$, $A_{\mu_1 \dots \mu_k}(x)$, ghost $C^{\mu_1 \dots \mu_k}(x)$ e connessioni generalizzate $\Gamma^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu\lambda}(x)$), lasciando sottintesi tutti gli indici liberi.

Una base dello spazio di funzioni Ω (che supponiamo analitiche in tutti i loro argomenti) è data dalla totalità dei monomi in $\Phi(x)$ e nelle loro derivate. Ne segue che l'operatore BRS δ, la cui azione consiste nel sostituire ciascun campo $\Phi(x)$ con la sua variazione $\mathrm{s}\Phi(x)$, può essere scritto sia nell'usuale notazione con gli operatori di creazione e distruzione sia, più brevemente, usando il prodotto per i primi e la derivazione per i secondi (avendo l'accortezza di considerare i campi e le loro derivate come oggetti indipendenti). Con queste notazioni, la versione locale dell'operatore BRS si scrive

$$\delta(x) = \sum_{\Phi} \sum_{i=0}^{\infty} \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_i} (\mathrm{s}\Phi(x)) \frac{\partial}{\partial(\partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_i} \Phi(x))} \tag{3.1}$$

In parole povere, l'azione di $\delta(x)$ su una generica espressione locale nei campi consiste nel sostituire la i-esima derivata (ivi incluso il caso $i = 0$) di ciascun campo con la i-esima derivata della sua variazione BRS.

3.1 Operatori differenziali indotti dalle trasformazioni BRS

Consideriamo ora gli operatori differenziali definiti da

$$\partial_{\mu_1\ldots\mu_j} := \left\{ \frac{\partial}{\partial C^{\mu_1\ldots\mu_j}(x)}, \delta(x) \right\} \tag{3.2}$$

dove $\delta(x)$ è dato dalla (3.1). Notiamo subito che

$$\partial_\mu = \left\{ \frac{\partial}{\partial C^{\mu}(x)}, \delta(x) \right\} = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

e dunque ∂_μ coincide con la derivata parziale ordinaria su M, coerentemente con la notazione utilizzata fino ad adesso.

Studiamo ora l'azione di $\partial_{\mu_1\ldots\mu_j}$ sui campi. Anzitutto è chiaro che

$$\partial_{\nu_1\ldots\nu_j} \left\{ \begin{array}{l} A^{\mu_1\ldots\mu_k}(x) \\ C^{\mu_1\ldots\mu_k}(x) \\ \Gamma^{\mu_1\ldots\mu_k}_{\rho\lambda}(x) \end{array} \right. = 0 \quad \text{se } j > k \tag{3.3}$$

Infatti nè nei campi, nè nelle loro variazioni figurano ghost non derivati di rango superiore a k. Analogamente

$$\partial_{\nu_1\ldots\nu_j} A_{\mu_1\ldots\mu_k}(x) = 0 \quad \text{se } j > N-k+1$$

Qualora sia $j \leq k$ l'operatore agisce in maniera non banale sui campi a indici alti e risulta, con un rapido calcolo,

$$\partial_{\nu_1\ldots\nu_j} \left\{ \begin{array}{l} A^{\mu_1\ldots\mu_k}(x) \\ C^{\mu_1\ldots\mu_k}(x) \\ \Gamma^{\mu_1\ldots\mu_k}_{\nu\lambda}(x) \end{array} \right. = \binom{k}{k-j+1} \delta^{\mu_1\ldots\mu_k}_{\rho_1\ldots\rho_k} \delta^{\lambda\rho_{k-j+2}\ldots\rho_k}_{\nu_1\ldots\nu_j} \partial_\lambda \left\{ \begin{array}{l} A^{\rho_1\ldots\rho_{k-j+1}}(x) \\ C^{\rho_1\ldots\rho_{k-j+1}}(x) \\ \Gamma^{\rho_1\ldots\rho_{k-j+1}}_{\nu\lambda}(x) \end{array} \right. \tag{3.4}$$

Dunque l'operatore $\partial_{\nu_1\ldots\nu_j}$ mappa il generico campo di rango k negli indici controvarianti in una combinazione lineare (simmetrizzata) di derivate prime dei corrispondenti campi di rango $k-j+1$. Si tratta, in altre parole, della combinazione di una derivata (del primo ordine) nelle coordinate x^μ e di un "salto" di $j-1$ indici in meno nel rango dei campi (cioè della sostituzione di un campo di rango k con un campo di rango $k-j+1$). In particolare:

Proposizione 3.1. *Se $k = j$ l'azione di $\partial_{\nu_1\ldots\nu_j}$ genera una combinazione lineare che coinvolge solo ed esclusivamente le derivate dei campi a un indice:*

$$\partial_{\nu_1\ldots\nu_k} \left\{ \begin{array}{l} A^{\mu_1\ldots\mu_k}(x) \\ C^{\mu_1\ldots\mu_k}(x) \\ \Gamma^{\mu_1\ldots\mu_k}_{\nu\lambda}(x) \end{array} \right. = k\delta^{\mu_1\ldots\mu_k}_{\rho_1\ldots\rho_k} \delta^{\lambda\rho_2\ldots\rho_k}_{\nu_1\ldots\nu_k} \partial_\lambda \left\{ \begin{array}{l} A^{\rho_1}(x) \\ C^{\rho_1}(x) \\ \Gamma^{\rho_1}_{\nu\lambda}(x) \end{array} \right.$$

Questa osservazione sarà importante nel seguito. Quanto all'azione degli operatori (3.2) sui campi a indici bassi, risulta

$$\partial_{\nu_1\ldots\nu_j} A_{\mu_1\ldots\mu_k}(x) = \delta^{\sigma_1\ldots\sigma_j}_{\nu_1\ldots\nu_j} \partial_{\sigma_1} A_{\sigma_2\ldots\sigma_j\mu_1\ldots\mu_k}(x)$$

e anche qui alla derivazione si accompagna un salto di $j-1$ indici (questa volta verso l'alto) nella torre dei campi.

Evidenziamo ancora una volta che, nonostante la notazione a più indici, l'operatore $\partial_{\nu_1\ldots\nu_j}$ è ancora una derivazione *del primo ordine.*

Elenchiamo di seguito le proprietà principali degli operatori appena introdotti.

Proposizione 3.2. *$\partial_{\mu_1\ldots\mu_j}$ commuta con $\delta(x)$.*

Dimostrazione. Per calcolo diretto dalla (3.2):

$$\left[\partial_{\mu_1\ldots\mu_j}, \delta\right] = \left[\left\{\frac{\partial}{\partial C^{\mu_1\ldots\mu_j}}, \delta\right\}, \delta\right] = \left[\frac{\partial}{\partial C^{\mu_1\ldots\mu_j}}, \delta\right] \delta + \delta \left[\frac{\partial}{\partial C^{\mu_1\ldots\mu_j}}, \delta\right] = 0$$

essendo $\delta^2 = 0$. □

Proposizione 3.3. *$\partial_{\mu_1\ldots\mu_j}$ commuta con l'operatore di derivazione rispetto ai ghost non differenziati.*

Dimostrazione. È sufficiente notare che nell'immagine dell'operatore $\partial_{\mu_1\ldots\mu_j}$ nello spazio di Fock non figura alcun ghost non differenziato (di qualunque rango). □

Proposizione 3.4. *Gli operatori $\partial_{\mu_1\ldots\mu_j}$ commutano tra loro:*

$$\left[\partial_{\nu_1\ldots\nu_k}, \partial_{\mu_1\ldots\mu_j}\right] = 0 \tag{3.5}$$

Dimostrazione. Si ha:

$$\left[\partial_{\nu_1\ldots\nu_k}, \partial_{\mu_1\ldots\mu_j}\right] = \left[\partial_{\nu_1\ldots\nu_k}, \left\{\frac{\partial}{\partial C^{\mu_1\ldots\mu_j}}, \delta\right\}\right] = 0$$

per le due proposizioni precedenti. □

Definiamo ora un *nuovo differenziale* $\mathbf{d}$ su M nella maniera seguente. Consideriamo anzitutto la seguente posizione:

$$\mathbf{d}_{(k)} := (\theta^{\nu_1} \otimes \ldots \otimes \theta^{\nu_k}) \partial_{\nu_1\ldots\nu_k} \tag{3.6}$$

Qui $\{\theta^\mu\}$ è una base di 1-forme su M la cui funzione è unicamente quella di fornire le etichette per il grading aggiuntivo nel rango dei campi. Si noti che nell'espressione (3.6) la simmetrizzazione in tutti gli indici è implicita a carico di $\partial_{\nu_1\ldots\nu_k}$.

Chiaramente $\mathbf{d}^2_{(k)} = \mathbf{d}_{(k)} \wedge \mathbf{d}_{(k)} = 0$. Possiamo allora definire

$$\mathbf{d} := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathbf{d}_{(k)} \tag{3.7}$$

La somma ha senso perchè l'operatore (3.6), agendo su una torre di tensori di rango massimo finito N, dà un risultato non nullo solo quando $k \leq N$. Per un esempio di azione dell'operatore (3.7), consideriamo il primo ordine non banale ($N = 2$): si ha

$$\begin{aligned}
\mathbf{d}A^{\mu_1\mu_2}(x) &= (\theta^\nu \partial_\nu + \theta^{\nu_1} \otimes \theta^{\nu_2} \partial_{\nu_1\nu_2}) A^{\mu_1\mu_2}(x) \\
&= \theta^\nu \partial_\nu A^{\mu_1\mu_2}(x) + (\theta^{\nu_1} \otimes \theta^{\nu_2}) \delta^{\mu_1\mu_2}_{\rho_1\rho_2} (\partial_{\nu_1} \delta^{\rho_2}_{\nu_2} A^{\rho_1}(x) + \partial_{\nu_2} \delta^{\rho_2}_{\nu_1} A^{\rho_1}(x)) \\
&= \theta^\nu \partial_\nu A^{\mu_1\mu_2}(x) + \frac{1}{2} (\theta^{\nu_1} \otimes \theta^{\nu_2}) (\partial_{\nu_1} (\delta^{\mu_1}_{\nu_2} A^{\mu_2}(x) + \delta^{\mu_2}_{\nu_2} A^{\mu_1}(x)) + \\
&\quad + \partial_{\nu_2} (\delta^{\mu_1}_{\nu_1} A^{\mu_2}(x) + \delta^{\mu_2}_{\nu_1} A^{\mu_1}(x))) \\
&= \theta^\nu \partial_\nu A^{\mu_1\mu_2}(x) + \frac{1}{2} \big(\theta^{\nu_1} \partial_{\nu_1} (A^{\mu_2}(x) \theta^{\mu_1} + A^{\mu_2}(x) \theta^{\mu_2}) + \\
&\quad + \theta^{\nu_2} \partial_{\nu_2} (A^{\mu_2}(x) \theta^{\mu_1} + A^{\mu_1}(x) \theta^{\mu_2}) \big) \\
&= \theta^\nu \partial_\nu \big(A^{\mu_1\mu_2}(x) + A^{\mu_2}(x) \theta^{\mu_1} + A^{\mu_1}(x) \theta^{\mu_2} \big)
\end{aligned}$$

e similmente per i tensori di rango superiore

$$\begin{aligned}
\mathbf{d}A^{\mu_1\ldots\mu_k}(x) = \delta^{\mu_1\ldots\mu_k}_{\rho_1\ldots\rho_k} \theta^\nu \partial_\nu \big(& A^{\rho_1\ldots\rho_k}(x) + A^{\rho_1\ldots\rho_{k-1}}(x) \theta^{\rho_k} + \\
& + A^{\rho_1\ldots\rho_{k-2}}(x) \theta^{\rho_{k-1}} \otimes \theta^{\rho_k} + \ldots + A^{\rho_1}(x) \theta^{\rho_2} \otimes \ldots \otimes \theta^{\rho_k} \big)
\end{aligned}$$

A questo punto è chiara la convenienza nel definire anche un nuovo operatore di derivazione nello spazio di Fock che memorizzi al suo interno i salti nel grading dei campi indotti dagli operatori (3.2):

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\partial}_\lambda &:= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} (\theta^{\nu_1} \otimes \ldots \otimes \theta^{\nu_i}) \left\{ \frac{\partial}{\partial C^{\lambda\nu_1\ldots\nu_i}(x)}, \delta \right\} \\
&= \partial_\lambda + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} (\theta^{\nu_1} \otimes \ldots \otimes \theta^{\nu_i}) \partial_{\lambda\nu_1\ldots\nu_i}
\end{aligned} \tag{3.8}$$

in cui nella seconda riga si è messo in evidenza come il primo termine della somma riproduca l'operatore di derivazione ordinario ∂_λ (e agisca solo sulla dipendenza spazio-temporale dei campi), mentre i termini successivi generano sia derivazioni che salti nella torre dei campi.

Notiamo che con il nuovo linguaggio messo a punto le trasformazioni BRS dei campi (2.1) e (2.13) si scrivono

$$\mathrm{s}C^{\mu_1\dots\mu_k}(x)=\sum_{i=1}^{N}C^{\nu_1\dots\nu_i}(x)\partial_{\nu_1\dots\nu_i}C^{\mu_1\dots\mu_k}(x) \tag{3.9a}$$

$$\mathrm{s}A^{\mu_1\dots\mu_k}(x)=\sum_{i=1}^{N}\big(C^{\nu_1\dots\nu_i}(x)\partial_{\nu_1\dots\nu_i}A^{\mu_1\dots\mu_k}(x)-A^{\nu_1\dots\nu_i}(x)\partial_{\nu_1\dots\nu_i}C^{\mu_1\dots\mu_k}(x)\big) \tag{3.9b}$$

$$\mathrm{s}A_{\mu_1\dots\mu_k}(x)=\sum_{i=1}^{N}\big(C^{\nu_1\dots\nu_i}(x)\partial_{\nu_1\dots\nu_i}A_{\mu_1\dots\mu_k}(x)+A_{\nu_1\dots\nu_i}(x)\partial_{\mu_1\dots\mu_k}C^{\nu_1\dots\nu_i}(x)\big) \tag{3.9c}$$

Sarà conveniente per il seguito introdurre una notazione compatta per gli oggetti a più indici: d'ora in avanti scriveremo quindi

$$\Phi^{\mu_1\dots\mu_k}(x)\to\Phi^{\mu_K}(x),\quad \partial_{\nu_1\dots\nu_j}\to\partial_{\nu_J},\quad \dots$$

e così via; resta sottinteso che $\mu_K=(\mu_1\dots\mu_k)$, $\mu_J=(\mu_1\dots\mu j)$, etc. e che tutte le espressioni coinvolte sono *simmetriche* per scambio di due qualunque tra gli indici lasciati impliciti.

Con queste convenzioni le (3.9) si scrivono *formalmente* esattamente come le leggi di trasformazione dei tensori di rango 1 sotto diffeomorfismi infinitesimi:

$$\mathrm{s}C^{\mu_K}(x)=\sum_{i=1}^{N}C^{\nu_I}(x)\partial_{\nu_I}C^{\mu_K}(x) \tag{3.10a}$$

$$\mathrm{s}A^{\mu_K}(x)=\sum_{i=1}^{N}\big(C^{\nu_I}(x)\partial_{\nu_I}A^{\mu_K}(x)-A^{\nu_I}(x)\partial_{\nu_I}C^{\mu_K}(x)\big) \tag{3.10b}$$

$$\mathrm{s}A_{\mu_K}(x)=\sum_{i=1}^{N}\big(C^{\nu_I}(x)\partial_{\nu_I}A_{\mu_K}(x)+A_{\nu_I}(x)\partial_{\mu_K}C^{\nu_I}(x)\big) \tag{3.10c}$$

3.2 Co-omologia locale

Ci interessa ora trovare la soluzione generale dell'equazione

$$\delta\Delta(x)=0 \tag{3.11}$$

dove δ è l'operatore BRS (3.1) e $\Delta(x)$ è una generica funzione locale dei campi $\Phi(x)$. Ogni soluzione della (3.11) si dirà un *cociclo* per l'operatore BRS δ.

È evidente che un cociclo è definito solo a meno di una funzione ${}^\flat\Delta(x)$ tale che sia $\delta\,{}^\flat\Delta(x)=0$ (*cobordo*): infatti se $\delta\Delta(x)=0$ allora è anche

$$\delta(\Delta(x)+\delta\,{}^\flat\Delta(x))=\delta\Delta(x)+0=0$$

Il quoziente tra lo spazio dei cocicli e quello dei cobordi di δ viene detto la **co-omologia** (locale) del differenziale BRS. Allora, in tutta generalità, la soluzione della (3.11) si può scrivere come

$$\Delta(x) = {}^{\natural}\Delta(x) + \delta\, {}^{\flat}\Delta(x) \tag{3.12}$$

con ${}^{\natural}\Delta(x)$ generico elemento della co-omologia di δ e ${}^{\flat}\Delta(x)$ funzione arbitraria[1]. Nostro scopo è quindi quello di trovare le soluzioni non banali della (3.11), ovvero determinare la co-omologia di δ sullo spazio di Fock.

L'introduzione degli operatori (3.2) visti in precedenza gioca qui un ruolo fondamentale: essi ci consentiranno infatti di ricollegare (tramite l'analogia formale espressa dalle leggi (3.10)) le tecniche risolutive per la (3.11) a quelle già utilizzate in passato per studiare la co-omologia dell'operatore BRS associato ai diffeomorfismi [4]. In questo modo sarà possibile riapplicare i risultati trovati in precedenza, il che abbrevierà notevolmente il calcolo.

Consideriamo dunque la struttura dell'operatore (3.1) e, sulla falsariga di quanto fatto in [4], mettiamone in evidenza il contenuto in ghost non derivati. Data la struttura delle leggi di trasformazione (3.10) si trova che è possibile scrivere[2]

$$\delta = \sum_{j=1}^{N} C^{\mu_J}(x)\partial_{\mu_J} + \widehat{\delta} \tag{3.13}$$

dove l'operatore residuo $\widehat{\delta}$ contiene solo campi ghost derivati. (Tale scomposizione è del tutto analoga a quella effettuata in [4], dove $\delta_{\text{Diff}} = C^{\mu}(x)\partial_{\mu} + \widehat{\delta}$.)

Similmente possiamo mettere in evidenza il contenuto in ghost non derivati nell'espressione di $\Delta(x)$. Ricordiamo anzitutto che, dato un tensore simmetrico di rango p definito su uno spazio lineare n-dimensionale, il numero delle sue componenti indipendenti è pari a

$$\binom{n+p-1}{p} = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}$$

Ne segue che nel settore dei campi di rango tensoriale p si hanno esattamente $\frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}$ campi ghost indipendenti $C^{\mu_1\cdots\mu_p}(x)$. Allora, nell'ipotesi di aver troncato la torre dei campi all'ordine N, il numero totale di ghost indipendenti del modello, che chiameremo N_{gh}, è pari a

$$N_{\text{gh}} = \sum_{p=1}^{N} \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!} = \frac{(n+N)!}{n!N!} - 1$$

[1] D'ora in avanti useremo sistematicamente i simboli $\natural$ e $\flat$ per etichettare, rispettivamente, gli elementi della co-omologia e i termini arbitrari.

[2] Di nuovo, da qui in avanti indicheremo genericamente un oggetto (funzione, operatore) il cui contenuto in ghost non derivati è nullo sormontandolo con un cappello.

Tornando al problema di esprimere $\Delta(x)$ in funzione del contenuto in ghost non derivati, sussisterà un'espressione del tipo

$$\Delta(x) = \sum C^{\mu_1 \dots \mu_{k_1}}(x) C^{\nu_1 \dots \nu_{k_2}}(x) \dots C^{\sigma_1 \dots \sigma_{k_p}}(x) \widehat{\Delta}_{\mu_1 \dots \mu_{k_1} | \nu_1 \dots \nu_{k_2} | \sigma_1 \dots \sigma_{k_p}}(x)$$

in cui la somma corre su una qualunque delle possibili scelte degli N_{gh} ghost indipendenti e i limiti k_i $(i = 1 \dots p)$ sono scelti di conseguenza.

Più sinteticamente possiamo scrivere

$$\Delta(x) = \sum C^{\mu_{K_1}}(x) C^{\nu_{K_2}}(x) \dots C^{\sigma_{K_p}}(x) \widehat{\Delta}_{\mu_{K_1} \nu_{K_2} \dots \sigma_{K_p}}(x) \tag{3.14}$$

infatti all'interno dell'i-esimo blocco di indici figurano esattamente k_i indici, per cui (ad esempio) $\mu_1 \dots \mu_{k_1} \to \mu_{K_1}$.

È chiaro che, con le prescrizioni dette, la funzione $\widehat{\Delta}(x)$ che figura nella (3.14) non contiene più alcun ghost non derivato. Si noti che $\widehat{\Delta}_{\mu_{K_1} \nu_{K_2} \dots \sigma_{K_p}}(x)$ è antisimmetrico per scambio di ciascuna coppia di indici multipli (ed è simmetrico per scambio di indici all'interno di uno stesso blocco, come da convenzioni generali stabilite in precedenza).

Applicando la (3.13) alla (3.14) e ponendo separatamente uguale a zero il contenuto in ciascun settore di ghost non derivati (principio di identità dei polinomi nello spazio di Fock) otteniamo un insieme di

$$\sum_{j=0}^{N_{\mathrm{gh}}} \binom{N_{\mathrm{gh}}}{j}$$

equazioni che rappresentano le *descent equations* per la co-omologia (locale) di δ.

In particolare consideriamo l'equazione relativa al *massimo* contenuto in ghost non derivati. In tal caso è chiaro che il primo addendo nella (3.13) agisce su ciascun $C^{\mu_{k_i}}(x)$ semplicemente ripristinando il medesimo ghost su cui agisce la derivata (in tutti gli altri casi si ha infatti un prodotto in cui uno stesso ghost figura due volte, che quindi è nullo); quanto all'azione su $\widehat{\Delta}$, essa fa zero per definizione. Resta da stabilire l'azione di $\widehat{\delta}$ sulla (3.14); si avrà

$$\begin{aligned} \widehat{\delta}\Delta(x) = \sum \widehat{\delta}\big(C^{\mu_{K_1}}(x) \dots C^{\sigma_{K_p}}(x)\big) \widehat{\Delta}_{\mu_{K_1} \dots \sigma_{K_p}}(x) + \\ \pm \sum C^{\mu_{K_1}}(x) \dots C^{\sigma_{K_p}}(x) \widehat{\delta} \widehat{\Delta}_{\mu_{K_1} \nu_{K_2} \dots \sigma_{K_p}}(x) \end{aligned}$$

Quindi in definitiva l'equazione relativa al settore più elevato si scrive

$$\delta\big(\underbrace{C^{\mu_J}(x) \dots C^{\sigma_L}(x)}_{N_{\mathrm{gh}} \text{ ghost}}\big) \widehat{\Delta}_{\mu_J \dots \sigma_L}(x) \pm \big(\underbrace{C^{\mu_J}(x) \dots C^{\sigma_L}(x)}_{N_{\mathrm{gh}} \text{ ghost}}\big) \widehat{\delta} \widehat{\Delta}_{\mu_J \dots \sigma_L}(x) = 0$$

e facendo i conti esplicitamente nel primo addendo si ottiene

$$\underbrace{C^{\mu_J}(x) \dots C^{\sigma_L}(x)}_{N_{\mathrm{gh}} \text{ ghost}} \left(N^2 \partial_\lambda C^\lambda(x) + \widehat{\delta} \right) \widehat{\Delta}_{\mu_J \dots \sigma_L}(x) = 0$$

Nei settori inferiori l'equazione che si ottiene sarà ovviamente molto più complicata. Adottando l'ulteriore convenzione di scrittura sugli indici multipli

$$\mu_{j_1} \ldots \mu_{j_{k_1}} \to \mu_{J_{1k_1}}, \qquad \text{ecc.}$$

si ottiene un'espressione del tipo

$$\begin{aligned}\widehat{\delta}\widehat{\Delta}_{\mu_{J_{1k_1}}\mu_{J_{2k_2}}\ldots\mu_{J_{pk_p}}} - \partial_{\mu_{J_{1k_1}}} C^{\nu_{I_{1\ell_1}}} \widehat{\Delta}_{\nu_{I_{1\ell_1}}\mu_{J_{2k_2}}\ldots\mu_{J_{pk_p}}} + \\ + \partial_{\mu_{J_{2k_2}}} C^{\nu_{I_{2\ell_2}}} \widehat{\Delta}_{\mu_{J_{1k_1}}\nu_{I_{2\ell_2}}\ldots\mu_{J_{pk_p}}} + \ldots + (-1)^{J_p} \partial_{\mu_{J_{pk_p}}} C^{\nu_{I_{p\ell_p}}} \widehat{\Delta}_{\mu_{J_{1k_1}}\mu_{j_{2k_2}}\ldots\nu_{I_{pk_p}}} + \\ + \partial_{\mu_{J_{1k_1}}} \widehat{\Delta}_{\mu_{J_{2k_2}}\ldots\mu_{J_{pk_p}}} - \partial_{\mu_{J_{2k_2}}} \widehat{\Delta}_{\mu_{J_{1k_1}}\ldots\mu_{J_{pk_p}}} + \ldots + \\ (-1)^{J_p} \partial_{\mu_{j_{1k_1}}} \widehat{\Delta}_{\nu_{I_{1\ell_1}}\mu_{J_{2k_2}}\ldots\mu_{J_{(p-1)k_{p-1}}}} = 0\end{aligned}$$

L'ultima equazione in fondo alla scaletta sarà semplicemente

$$\widehat{\delta}\widehat{\Delta}(x) = 0 \tag{3.15}$$

Un caso particolare che sarà utile notare in vista del seguito si ha nel settore in cui la carica di Faddeev-Popov è uguale alla dimensione dello spazio n. In tal caso interverranno oggetti del tipo

$$\sum_{j_i=1}^{N-1} C^{\rho_n\mu_1\ldots\mu_{j_n}}(x) C^{\rho_{n-1}\nu_1\ldots\nu_{j_n-1}}(x) \ldots C^{\rho_1\sigma_1\ldots\sigma_{j_1}}(x) \widehat{\Delta}_{\mu_1\ldots\mu_{j_n}\nu_1\ldots\nu_{j_{n-1}}\ldots\sigma_1\ldots\sigma_{j_1}}(x)$$

In tale espressione tutti gli indici non sommati $\rho_1 \ldots \rho_n$ diventano muti a causa del fatto che essi sono in numero uguale alla dimensione dello spazio: non essendo possibile alcuna ripetizione negli indici, l'unica possibilità di ottenere un risultato non nullo si ha quando gli indici $\rho_1 \ldots \rho_n$ assumono una sola volta tutti i valori compresi tra 1 e n. Allora

$$\begin{aligned}\delta\left(\sum_{j_i=1}^{N-1} C^{\rho_n\mu_1\ldots\mu_{j_n}}(x) \ldots C^{\rho_1\sigma_1\ldots\sigma_{j_1}}(x) \widehat{\Delta}_{\mu_1\ldots\mu_{j_n}\ldots\sigma_1\ldots\sigma_{j_1}}(x)\right) = \\ \partial_\lambda\left(\sum_{j_i=1}^{N-1} C^{\lambda\eta_1\ldots\eta_{j_n+1}}(x) C^{\rho_n\mu_1\ldots\mu_{j_n}}(x) C^{\rho_{n-1}\nu_1\ldots\nu_{j_n-1}}(x) \ldots C^{\rho_1\sigma_1\ldots\sigma_{j_1}}(x)\right. \\ \left.\widehat{\Delta}_{\eta_1\ldots\eta_{j_n+1}\mu_1\ldots\mu_{j_n}\nu_1\ldots\nu_{j_{n-1}}\ldots\sigma_1\ldots\sigma_{j_1}}(x)\right) = 0\end{aligned} \tag{3.16}$$

Torniamo ora al problema di risolvere la scala di equazioni trovata in precedenza. Occorre ovviamente partire dal gradino più basso, cioè dalla (3.15); alla luce della soluzione già ottenuta in [4] per l'operatore BRS associato al gruppo dei diffeomorfismi, introduciamo le quantità

$$(U_0)^{\mu_1\ldots\mu_k}_{\nu_1\ldots\nu_j}(x) := \partial_{\nu_1\ldots\nu_j} C^{\mu_1\ldots\mu_k}(x) \tag{3.17}$$

(Ricordiamo che deve essere $j \leq k$ perchè si abbia $U_0 \neq 0$: cfr. (3.3)). Chiaramente risulta

$$\widehat{\delta}(U_0)^{\mu_1\ldots\mu_k}_{\nu_1\ldots\nu_j}(x) = \widehat{\delta}(\partial_{\nu_1\ldots\nu_j}C^{\mu_1\ldots\mu_k}(x)) = \sum_{\ell=1}^{N}\partial_{\nu_1\ldots\nu_j}C^{\rho_1\ldots\rho_\ell}(x)\partial_{\rho_1\ldots\rho_\ell}C^{\mu_1\ldots\mu_k}(x)$$

ovvero, più sinteticamente,

$$\widehat{\delta}(U_0)^{\mu_1\ldots\mu_k}_{\nu_1\ldots\nu_j}(x) = \sum_{\ell=1}^{N}(U_0)^{\rho_1\ldots\rho_\ell}_{\nu_1\ldots\nu_j}(x)(U_0)^{\mu_1\ldots\mu_k}_{\rho_1\ldots\rho_\ell}(x) = (U_0(x)U_0(x))^{\mu_1\ldots\mu_k}_{\nu_1\ldots\nu_j}$$

Segue allora da quanto visto in [4] che il generico elemento della co-omologia di $\widehat{\delta}$ è dato da un prodotto di termini del tipo

$$^{\natural}\widehat{\Delta}_{(n)}(x) = \sum_{i=1}^{N} a_i\big(\underbrace{U_0(x)U_0(x)\ldots U_0(x)}_{n \text{ volte}}\big)^{\rho_1\ldots\rho_i}_{\rho_1\ldots\rho_i} \tag{3.18}$$

con n dispari (quando n è pari tale espressione è zero, come segue banalmente dalla proprietà ciclica delle tracce e dall'anticommutatività dei campi ghost).

Ora, come detto gli $U_0(x)$ sono non nulli solo se gli indici alti sono in numero maggiore o uguale degli indici bassi; ma nell'espressione precedente figura una traccia, per cui il numero di indici alti dell'ultimo ghost deve essere uguale al numero di indici bassi del primo operatore di derivazione. Ne segue che il numero di indici non può mai cambiare andando da destra verso sinistra nell'equazione (3.18):

$$^{\natural}\widehat{\Delta}_{(n)}(x) = \sum_{i=1}^{N} a_i\big(\underbrace{(U_0)^{\mu_1\ldots\mu_i}_{\rho_1\ldots\rho_i}(x)(U_0)^{\nu_1\ldots\nu_i}_{\mu_1\ldots\mu_i}(x)\ldots(U_0)^{\rho_1\ldots\rho_i}_{\sigma_1\ldots\sigma_i}(x)}_{n \text{ volte}}\big) \tag{3.19}$$

Ma, ricordando la Proposizione 3.1, ciò significa che nell'espressione (3.19) figurano solo ed esclusivamente le *derivate prime* dei ghost *del primo livello* $C^\mu(x)$. Se ne conclude che gli unici termini non nulli della co-omologia di $\widehat{\delta}$ nascono tutti dal primo livello della torre dei campi ghost.

Qualche esempio può aiutare a chiarire la situazione. La traccia di U_0 più semplice da costruire è ovviamente quella relativa al settore di carica 1:

$$(U_0)^{\rho_1\ldots\rho_i}_{\rho_1\ldots\rho_i}(x) = \alpha_i\partial_\lambda C^\lambda(x) \tag{3.20}$$

dove la forma del secondo membro segue subito dalla Proposizione 3.1 (α_i è un coefficiente numerico che dipende solo da i). Ne segue per la (3.18):

$$^{\natural}\widehat{\Delta}_{(1)}(x) = \sum_{i=1}^{N} a_i\alpha_i\partial_\lambda C^\lambda(x) \tag{3.21}$$

Similmente nel settore di carica 3 si hanno tracce del tipo

$$(U_0)^{\mu_1\dots\mu_i}_{\rho_1\dots\rho_i}(x)(U_0)^{\nu_1\dots\nu_i}_{\mu_1\dots\mu_i}(x)(U_0)^{\rho_1\dots\rho_i}_{\nu_1\dots\nu_i}(x)$$

che nel caso $i = 1$ danno origine al termine $\partial_\rho C^\mu(x)\partial_\mu C^\nu(x)\partial_\nu C^\rho(x)$ studiato in [4], e nel caso a più indici generano espressioni simili con coefficienti numerici più complicati.

Una soluzione in un settore di carica pari, per esempio 2, si può ottenere moltiplicando tra loro la traccia (3.20) e la soluzione di carica 1 (3.21): infatti è ovvio che

$$\widehat{\delta}(\alpha_i\partial_\rho C^\rho(x)\sum_{i=1}^{N} a_i\alpha_i\partial_\lambda C^\lambda(x)) = 0$$

e più in generale

$$\widehat{\delta}\big((U_0)^{\rho_1\dots\rho_i}_{\rho_1\dots\rho_i}(x)^{\natural}\widehat{\Delta}_{(2n-1)}(x)\big) = 0$$

Riassumendo, il risultato importante cui siamo giunti è che:

Proposizione 3.5. *La co-omologia dell'operatore $\widehat{\delta}$ sullo spazio delle funzioni locali dipende solo dalle derivate prime dei ghost di rango* 1.

Ottenuta la co-omologia dell'operatore $\widehat{\delta}$ si può risalire la scala delle descent equations per ottenere la co-omologia dell'operatore BRS completo (3.13). Si noti che, vista la legge di trasformazione dei ghost (2.1a), nel processo di risalita non vengono mai generati ghost di rango superiore a 1; in altre parole, la co-omologia è del tutto analoga a quella già trovata per i diffeomorfismi e che, com'è noto, sta all'origine delle anomalie gravitazionali [1].

Sempre seguendo [4], per scrivere la soluzione generale per la co-omologia locale di δ introduciamo le quantità

$$U^\mu_\nu(x) := D_\nu C^\mu(x) = \partial_\nu C^\mu(x) + \Gamma^\mu_{\nu\rho}(x)C^\rho(x) \tag{3.22}$$

formalmente analoghe alle $(U_0)^\mu_\nu(x)$, in cui però la derivata parziale viene sostituita dalla derivata covariante. Ne segue la legge di trasformazione BRS

$$\mathrm{s}U^\mu_\nu(x) = \partial_\nu\,\mathrm{s}C^\mu(x) + \mathrm{s}\Gamma^\mu_{\nu\rho}(x)C^\rho(x) + \Gamma^\mu_{\nu\rho}(x)\,\mathrm{s}C^\rho(x)$$

e si verifica facilmente che

$$\mathrm{s}U^\mu_\nu(x) = U^\lambda_\nu(x)U^\mu_\lambda(x) + C^\sigma(x)C^\lambda(x)R^\mu_{\nu\sigma\lambda}(x)$$

ovvero, definito

$$\Xi^\mu_\nu(x) := C^\sigma(x)C^\lambda(x)R^\mu_{\nu\sigma\lambda}(x) \tag{3.23}$$

si ha

$$\mathrm{s}U^\mu_\nu(x) = U^\lambda_\nu(x)U^\mu_\lambda(x) + \Xi^\mu_\nu(x)$$

Ne segue la versione BRS della "formula russa" [7,32], da cui si ottiene l'espressione generale

$$\begin{aligned} {}^{\natural}\widehat{\Delta}(x) &= C^{\mu_1}(x)C^{\mu_2}(x)\dots C^{\mu_{2i}}(x)\,{}^{\natural}\widehat{\Delta}_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{2i}}(x) + \\ &+ C^{\mu_1}(x)C^{\mu_2}(x)\dots C^{\mu_{2i-1}}(x)\,{}^{\natural}\widehat{\Delta}_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{2i-1}}(x) + \dots + {}^{\natural}\widehat{\Delta}(x) \end{aligned} \tag{3.24}$$

che fornisce il generico elemento della co-omologia di δ in funzione di ${}^{\natural}\widehat{\Delta}(x)$ (generico elemento della co-omologia di $\widehat{\delta}$) e delle forme che si ottengono da esso risalendo nella scomposizione (3.13) nei ghost non derivati. In definitiva:

Proposizione 3.6. *La co-omologia dell'operatore BRS δ sullo spazio delle funzioni locali dipende esclusivamente di ghost di rango* 1 *e dalle connessioni di rango* 1 *(e loro derivate).*

Le connessioni infatti rientrano in gioco nel passaggio dalle derivate ordinarie alle derivate covarianti espresso dalla (3.22).

Capitolo 4

Costruzione del modello

Per prendere contatto con le applicazioni fisiche occorre adesso studiare i possibili modelli, classici e quantistici, che incorporino la simmetria costruita in precedenza a livello di teoria di gauge locale. In questo contesto l'azione classica del modello nasce in maniera quasi automatica dalla richiesta di individuare il generico elemento di carica zero della co-omologia funzionale dell'operatore BRS δ, ovvero il più generico funzionale dei campi che sia invariante sotto le trasformazioni di simmetria considerate.

Ovviamente con questo approccio non si recuperano i termini dell'azione pari a una variazione BRS esatta, e quindi in particolare il termine di gauge fixing; questo dovrà essere trovato in un secondo momento in base a requisiti di altra natura, per esempio il limite piatto.

4.1 Co-omologia funzionale

Supponiamo di aver costruito una teoria di campo classica definita, come usuale, da un funzionale di azione

$$S = \int \mathcal{L}(x)\, \mathrm{d}^n x \tag{4.1}$$

Dire che la teoria è invariante sotto la simmetria definita dalle trasformazioni (3.9) significa dire che

$$\delta S = 0 \tag{4.2}$$

dove δ è l'operatore BRS globale

$$\delta = \sum_{\Phi} \int \mathrm{s}\Phi(x) \frac{\delta}{\delta\Phi(x)}\, \mathrm{d}x \tag{4.3}$$

Il passaggio dalla teoria classica alla corrispondente teoria quantistica si effettua sostituendo il funzionale di azione classico S con un nuovo funzionale Γ, noto con il nome di *azione effettiva* della teoria in esame, che si identifica con il funzionale generatore delle funzioni di Green irriducibili (1PI) della teoria (si vedano ad esempio [23, 25]). Esso sarà definito, in generale, come serie di potenze (formale) in $\hbar$:

$$\Gamma := \sum_n \Gamma_{(n)} \hbar^n$$

Una caratteristica notevole dell'azione effettiva è che essa coincide con S all'ordine zero in $\hbar$:

$$\Gamma_{(0)} = S$$

Tuttavia può accadere che nel passaggio dalla teoria classica a quella quantistica l'invarianza (4.2) venga rotta agli ordini successivi in $\hbar$ a causa delle procedure di rinormalizzazione, che alterano l'azione originaria con l'inserimento di opportuni *controtermini* (definiti ancora come serie di potenze formali in $\hbar$). Quando ciò accade, si parla di una **anomalia**.

Il Quantum Action Principle (cfr. [24]) ci garantisce che in una teoria quantistica *locale* la (4.2) può essere sostituita a ciascun ordine in $\hbar$ da un'uguaglianza del tipo

$$\delta\Gamma_{(n-1)} = \hbar^n \Delta + o(\hbar^{n+1}) \tag{4.4}$$

dove Δ è un funzionale *locale* nei campi. Dalla (4.4) si ricava (all'ordine n fissato) la seguente *condizione di consistenza* per Δ:

$$\delta\Delta = 0 \tag{4.5}$$

La (4.5) definisce un problema di co-omologia per δ (esattamente come la (3.11) del capitolo 3), ma questa volta sullo spazio dei *funzionali* dei campi $\Phi(x)$. Ne segue che, attivando gli stessi ragionamenti che hanno portato alla (3.12) (e usando le medesime notazioni), possiamo sempre scrivere

$$\Delta = {}^{\natural}\Delta + \delta\, {}^{\flat}\Delta \tag{4.6}$$

dove ${}^{\natural}\Delta$ è il generico elemento della co-omologia *funzionale* del differenziale BRS δ e ${}^{\flat}\Delta$ è un funzionale arbitrario dei campi.

È chiaro che l'insorgere di un'anomalia è legata unicamente alla presenza del primo termine nella (4.6): infatti se la co-omologia funzionale di δ è vuota, cioè ${}^{\natural}\Delta = 0$, la (4.6) diventa

$$\Delta = \delta\, {}^{\flat}\Delta$$

cioè, Δ stesso è un BRS-cociclo. In tal caso la (4.4) si scrive

$$\delta\Gamma_{(n-1)} = \hbar^n \delta\, {}^{\flat}\Delta + o(\hbar^{n+1})$$

e quindi, definendo una nuova azione effettiva $\tilde{\Gamma}_{(n)} := \Gamma_{(n-1)} - \hbar^n\, {}^{\flat}\Delta$ all'ordine n in $\hbar$ si ha

$$\delta\tilde{\Gamma}_{(n)} = 0$$

In altre parole è possibile definire, a ciascun ordine in $\hbar$, una nuova azione $\tilde{\Gamma}$ che riassorbe l'effetto dei controtermini non invarianti, ripristinando la simmetria dell'azione classica espressa dall'equazione (4.2).

Se ne conclude che l'insorgere di anomalie nelle teorie quantistiche di campo è strettamente legato alla struttura dello spazio della co-omologia dell'operatore BRS associato alla simmetria presa in considerazione. Lo studio della co-omologia funzionale di δ riveste dunque un'importanza fondamentale per stabilire se un'invarianza che sussiste a livello classico possa essere mantenuta a livello quantistico.

In pratica, lo studio della co-omologia funzionale di δ si può ricondurre all'analogo problema sullo spazio delle funzioni locali (non integrate) dei campi. Infatti, essendo Δ un funzionale locale dei campi, si avrà

$$\Delta = \int \Delta^1_n(x)$$

Abbiamo adottato qui la notazione standard in cui il doppio grading della forma locale $\Delta(x)$ viene indicato con la notazione Δ^p_q, dove p è la carica di Faddeev-Popov della forma (grading associato all'operatore BRS δ) e q è il rango tensoriale della forma sullo spazio-tempo (grading associato al differenziale esterno d).

La condizione di consistenza (4.5) si traduce quindi nell'imporre che

$$\delta \int \Delta^1_n(x) = 0 \tag{4.7}$$

ovvero, che la variazione BRS di $\Delta^1_n(x)$ sia un differenziale esatto. Questo viene detto un problema di *co-omologia di δ modulo* d.

La strategia generale per affrontare questo problema è ben nota [7, 24] e implica la soluzione di una "scala" di equazioni note in letteratura con il nome di *descent equations*:

$$\delta\Delta^p_n(x) + \mathrm{d}\Delta^{p+1}_{n-1}(x) = 0 \tag{4.8a}$$

$$\delta\Delta^{p+1}_{n-1}(x) + \mathrm{d}\Delta^{p+2}_{n-2}(x) = 0 \tag{4.8b}$$

$$\vdots$$

$$\delta\Delta^{p+n-1}_1(x) + \mathrm{d}\Delta^{p+n}_0(x) = 0 \tag{4.8c}$$

$$\delta\Delta^{p+n}_0(x) = 0 \tag{4.8d}$$

Per risolvere le (4.8) è sufficiente trovare la soluzione generale della (4.8d), cioè dell'equazione che si trova in fondo alla scala; nota questa è possibile "risalire" fino ad ottenere la soluzione generale del problema originario. Siamo dunque ricondotti al problema di studiare la co-omologia di δ sullo spazio Ω delle funzioni locali dei campi, o spazio di Fock; ma questo è proprio ciò che è stato fatto nel capitolo precedente per l'operatore BRS associato alla simmetria (3.9). Questo passo non comporta quindi ulteriori problemi.

Restando per il momento sul piano generale, la soluzione della (4.8d) si può scrivere come

$$\Delta_0^{p+n}(x) = {}^\natural\Delta_0^{p+n}(x) + \delta\, {}^\flat\Delta_0^{p+n-1}(x)$$

e sostituendo nella (4.8c):

$$\delta\Delta_1^{p+n-1}(x) + \mathrm{d}x^\lambda \partial_\lambda({}^\natural\Delta_0^{p+n}(x) + \delta\, {}^\flat\Delta_0^{p+n-1}(x)) = 0 \tag{4.9}$$

A questo punto vorremmo impiegare la strategia già utilizzata in [4] ed esprimere il primo membro della (4.9) come una variazione BRS. A tale scopo è necessario esprimere l'operatore di derivazione ∂_λ in funzione di δ; ma mentre nel caso dei diffeomorfismi considerato in [4] era sufficiente porre

$$\partial_\lambda = \left\{ \frac{\partial}{\partial C^\lambda(x)}, \delta \right\}$$

nella situazione attuale c'è una complicazione ulteriore data dal fatto che la derivata prima di un certo campo può essere generata non solo dalla variazione del campo stesso, ma anche dalla variazione di un campo della medesima famiglia con un numero di indici *diverso*; questa è una conseguenza della struttura stessa delle leggi di trasformazione (3.9).

Fortunatamente la soluzione è a portata di mano: è sufficiente sostituire ∂_λ con l'operatore di derivazione $\boldsymbol{\partial}_\lambda$ introdotto nella (3.8), che grazie al grading supplementare nei θ^ν memorizza al suo interno tutti i possibili salti nella torre dei campi. In definitiva, la (4.9) si scrive

$$\delta\Delta_1^{p+n-1}(x) + \mathrm{d}x^\lambda \sum_i \frac{1}{i!}(\theta^{\nu_1}\otimes\ldots\otimes\theta^{\nu_i})\partial_{\lambda\nu_1\ldots\nu_i}({}^\natural\Delta_0^{p+n}(x) + \delta\, {}^\flat\Delta_0^{p+n-1}(x)) = 0$$

ovvero

$$\delta\Bigg((\Delta_1^{p+n-1})_\lambda(x) - \mathrm{d}x^\lambda \sum_i \frac{1}{i!}(\theta^{\nu_1}\otimes\ldots\otimes\theta^{\nu_i})\Big(\frac{\partial}{\partial C^{\lambda\nu_1\ldots\nu_i}(x)}\, {}^\natural\Delta_0^{p+n}(x) + \\ + \partial_{\lambda\nu_1\ldots\nu_i}\, {}^\flat\Delta_0^{p+n-1}(x)\Big)\Bigg) = 0$$

da cui si ricava la soluzione della (4.8c):

$$(\Delta_1^{p+n-1})_\lambda(x) = \sum_i \frac{1}{i!}(\theta^{\nu_1}\otimes\ldots\otimes\theta^{\nu_i})\Big(\frac{\partial}{\partial C^{\lambda\nu_1\ldots\nu_i}(x)}\, {}^\natural\Delta_0^{p+n}(x) + \\ + \partial_{\lambda\nu_1\ldots\nu_i}\, {}^\flat\Delta_0^{p+n-1}(x)\Big) + ({}^\natural\Delta_1^{p+n-1})_\lambda(x) + \delta({}^\flat\Delta_1^{p+n-2})_\lambda(x)$$

In questo modo si può risalire l'intera scala (4.8) fino a ottenere la soluzione generale della (4.8a) in funzione del contenuto in ghost non derivati delle forme

${}^{\natural}\Delta(x)$, cioè della co-omologia locale di δ in ciascun settore tensoriale. Questo risultato estende quello ottenuto per il gruppo dei diffeomorfismi in [4].

In definitiva, la soluzione generale si scrive

$$\begin{aligned}
&(\Delta_n^p)_{\rho_1\ldots\rho_n}(x) = \\
&= \sum_i \frac{1}{i!}(\theta^{\nu_1}\otimes\ldots\otimes\theta^{\nu_i})\left(\frac{\partial}{\partial C^{\rho_1\nu_1\ldots\nu_i}(x)}\,{}^{\natural}\Delta_0^{p+n}(x) + \partial_{\rho_1\nu_1\ldots\nu_i}\,{}^{\flat}\Delta_0^{p+n-1}(x)\right)\cdots \\
&\quad\sum_i \frac{1}{i!}(\theta^{\nu_1}\otimes\ldots\otimes\theta^{\nu_i})\left(\frac{\partial}{\partial C^{\rho_n\nu_1\ldots\nu_i}(x)}\,{}^{\natural}\Delta_0^{p+n}(x) + \partial_{\rho_n\nu_1\ldots\nu_i}\,{}^{\flat}\Delta_0^{p+n-1}(x)\right) + \\
&+\sum_i \frac{1}{i!}(\theta^{\nu_1}\otimes\ldots\otimes\theta^{\nu_i})\left(\frac{\partial}{\partial C^{\rho_2\nu_1\ldots\nu_i}(x)}({}^{\natural}\Delta_1^{p+n-1})_{\rho_1}(x) + \partial_{\rho_2\nu_1\ldots\nu_i}({}^{\flat}\Delta_1^{p+n-2})_{\rho_1}(x)\right)\cdots \\
&\sum_i \frac{1}{i!}(\theta^{\nu_1}\otimes\ldots\otimes\theta^{\nu_i})\left(\frac{\partial}{\partial C^{\rho_n\nu_1\ldots\nu_i}(x)}({}^{\natural}\Delta_1^{p+n-1})_{\rho_1}(x) + \partial_{\rho_n\nu_1\ldots\nu_i}({}^{\flat}\Delta_1^{p+n-2})_{\rho_1}(x)\right) + \\
&\qquad + \ldots + ({}^{\natural}\Delta_n^p)_{\rho_1\ldots\rho_n}(x) + \delta({}^{\flat}\Delta_n^{p-1})_{\rho_1\ldots\rho_n}(x) \qquad (4.10)
\end{aligned}$$

e da questa formula è possibile estrarre (conoscendo la co-omologia locale di δ in tutti i settori di interesse) un'espressione di validità generale per Δ_n^p, e quindi in particolare nel caso $p = 1$ per l'anomalia che figura nella (4.7). Ciò conclude la discussione del problema generale.

Se ora sostituiamo nella (4.10) la soluzione (3.24) trovata nel capitolo precedente per la co-omologia locale di δ abbiamo che il formalismo dei θ^μ diventa del tutto inutile, dato che gli unici termini non nulli emergono dai ghost (e dalle connessioni) di rango 1. Ne segue che la co-omologia di δ è espressa da una formula del tutto analoga a quella trovata in [4]:

$$\begin{aligned}
\Delta_n^p(x) = \sum_{r=0}^{n}(-1)^r\frac{1}{r!}\frac{\partial}{\partial C^{\rho_1}(x)}\cdots\frac{\partial}{\partial C^{\rho_r}(x)}\,{}^{\natural}\Delta_{n-r}^{p+r}(x)\,\mathrm{d}x^{\rho_1}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x^{\rho_r} + \\
+\,\mathrm{d}\,{}^{\flat}\Delta_{n-1}^{p}(x) + \delta\,{}^{\flat}\Delta_n^{p-1}(x) \qquad (4.11)
\end{aligned}$$

Così ad esempio nel caso $n = 4$ e per il settore di carica 1 si ottiene la nota anomalia

$$\Delta_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}(x) = 10\partial_{\lambda_1}C^{\lambda_2}(x)\partial_{\alpha_1}\Gamma^{\lambda_3}_{\alpha_2\lambda_2}(x)\left(\partial_{\alpha_3}\Gamma^{\lambda_1}_{\alpha_4\lambda_3} + \frac{1}{2}\Gamma^{\lambda_3}_{\alpha_3\lambda_2}(x)\Gamma^{\lambda_1}_{\alpha_4\lambda_3}(x)\right)$$

già derivata in [4].

4.2 Azione classica

Possiamo ora procedere con il programma delineato all'inizio del capitolo, ovvero con la ricerca di un'azione classica come elemento di carica zero della co-omologia funzionale di δ.

Qui si incontra subito una difficoltà: siccome stiamo lavorando su una generica varietà curva (a priori priva di metrica), non è affatto chiaro in che modo si possano costruire quantità geometriche adatte a svolgere il ruolo di integrando sulla varietà spazio-temporale. Per superare questa difficoltà introduciamo una *nuova* famiglia di campi

$$g^{\mu\nu}_{\rho_1\ldots\rho_k}(x) \tag{4.12}$$

con $k = 0 \ldots N$, che svolgano (in qualche senso da chiarirsi) il ruolo di "metriche" su M. A tal proposito occorre notare che per ottenere una lagrangiana e, quindi, un'azione che sia *polinomiale* nei campi è necessario attribuire ai (4.12) lo status di *densità* tensoriali di peso 1, in modo tale che da esse sia possibile ottenere (mediante contrazione con gli altri campi del modello) delle densità scalari che sia possibile integrare su M usando la misura standard (di spazio piatto) $\mathrm{d}^n x = \mathrm{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^n$. In questo modo pur avendo a che fare con una teoria su spazio curvo possiamo costruire il modello in uno spazio piatto fittizio, in cui appariranno connessioni e curvature come residui del processo di riscalamento dei campi.

Questo approccio è del tutto analogo alla formulazione di Weyl della teoria della relatività generale, in cui l'azione di Einstein-Hilbert

$$S_{\mathrm{EH}} = \int R\sqrt{g}\,\mathrm{d}^4x$$

(R scalare di curvatura, g valore assoluto del determinante del tensore metrico), che è evidentemente una funzione non polinomiale di $g^{\mu\nu}(x)$, viene scritta come

$$S_{\mathrm{Weyl}} = \int \mathcal{R}\,\mathrm{d}^4x$$

con $\mathcal{R}$ densità scalare di peso 1; il fattore non polinomiale viene così riassorbito nei campi nel termine dei quali viene definita la teoria.

È importante sottolineare che questo approccio è valido solo in teorie *invarianti di scala* [2]; il modello qui sviluppato soddisfa a tale requisito, dato che consideriamo solo campi a massa nulla.

Nel nostro caso si sono introdotti fino ad adesso solo ed esclusivamente campi *tensoriali* ($A^{(k)}$, $A_{(k)}$, ghost e connessioni) le cui contrazioni daranno quindi origine a quantità genuinamente scalari; per ottenere una densità è quindi indispensabile l'introduzione dei campi ausiliari (4.12).

	$A^{(k)}$	$C^{(k)}$	$A_{(k)}$	$\Gamma^{(k)}_{\nu\rho}$	$g^{\mu\nu}_{(k)}$
Dimensione UV	1	0	1	1	0
Peso di Weyl	0	0	0	0	1

Tabella 4.1: Dimensione e peso dei campi introdotti

La legge di trasformazione BRS di una densità è nota: dovrà essere

$$\begin{aligned}
\mathrm{s}g^{\mu\nu}_{\rho_1\ldots\rho_k}(x) = \sum_{i=1}^{N-k+1} \Big(& C^{\sigma_1\ldots\sigma_i}(x)\partial_{\sigma_1} g^{\mu\nu}_{\sigma_2\ldots\sigma_i\rho_1\ldots\rho_k}(x) + \\
& + \sum_{j=1}^{k} g^{\mu\nu}_{\sigma_1\ldots\sigma_i\rho_1\ldots\widehat{\rho_j}\ldots\rho_k}(x)\partial_{\rho_j} C^{\sigma_1\ldots\sigma_i}(x) + g^{\mu\nu}_{\sigma_2\ldots\sigma_i\rho_1\ldots\rho_k}(x)\partial_{\sigma_1} C^{\sigma_1\ldots\sigma_i}(x) + \\
& - \sum_{\ell=1}^{k} g^{\sigma_\ell\nu}_{\sigma_2\ldots\sigma_i\rho_1\ldots\rho_k}(x)\partial_{\sigma_\ell} C^{\sigma_1\ldots\sigma_{\ell-1}\mu\sigma_{\ell+1}\ldots\sigma_i}(x) + \\
& - \sum_{\ell=1}^{k} g^{\mu\sigma_\ell}_{\sigma_2\ldots\sigma_i\rho_1\ldots\rho_k}(x)\partial_{\sigma_\ell} C^{\sigma_1\ldots\sigma_{\ell-1}\nu\sigma_{\ell+1}\ldots\sigma_i}(x)\Big)
\end{aligned} \tag{4.13}$$

in cui $g^{\mu\nu}_{\sigma_2\ldots\sigma_i\rho_1\ldots\rho_k}(x)\partial_{\sigma_1}C^{\sigma_1\ldots\sigma_i}(x)$ è il termine chiave, che la distingue dalla legge tensoriale. In particolare quando $k = N$ la (4.13) diventa

$$\begin{aligned}
\mathrm{s}g^{\mu\nu}_{\rho_1\ldots\rho_N}(x) = C^\sigma(x)\partial_\sigma g^{\mu\nu}_{\rho_1\ldots\rho_N}(x) + \sum_{\ell=1}^{N} \partial_{\rho_\ell} C^\sigma(x) g^{\mu\nu}_{\sigma\rho_1\ldots\widehat{\rho_\ell}\ldots\rho_N}(x) + \\
+ g^{\mu\nu}_{\rho_1\ldots\rho_k}(x)\partial_\sigma C^\sigma(x) - g^{\sigma\nu}_{\rho_1\ldots\rho_k}(x)\partial_\sigma C^\mu(x) - g^{\mu\sigma}_{\rho_1\ldots\rho_k}(x)\partial_\sigma C^\nu(x)
\end{aligned} \tag{4.14}$$

e quando $k = 0$:

$$\mathrm{s}g^{\mu\nu}(x) = C^\sigma(x)\partial_\sigma g^{\mu\nu}(x) + g^{\mu\nu}(x)\partial_\sigma C^\sigma(x) - g^{\sigma\nu}(x)\partial_\sigma C^\mu(x) - g^{\mu\sigma}(x)\partial_\sigma C^\nu(x) \tag{4.15}$$

L'introduzione dei campi (4.12) rende ora possibile costruire nuovi elementi di carica zero della co-omologia funzionale di δ, ovvero possibili termini per l'azione. Infatti supponiamo di costruire una densità scalare W di peso 1 mediante contrazione dei campi (4.12) con un generico oggetto tensoriale che sia funzione degli altri campi del modello; allora la legge di trasformazione BRS di tale densità sarà

$$\mathrm{s}W(x) = \partial_\lambda(C^{\lambda\mu_1\ldots\mu_k}(x)W_{\mu_1\ldots\mu_k}(x)) \tag{4.16}$$

con

$$\begin{aligned}
\mathrm{s}W_{\mu_1\ldots\mu_k}(x) = \sum_{i=1}^{N-k+1} \Big(& C^{\sigma_1\ldots\sigma_i}(x)\partial_{\sigma_1} W_{\sigma_2\ldots\sigma_i\mu_1\ldots\mu_k}(x) + \\
& + \sum_{j=1}^{k} W_{\sigma_1\ldots\sigma_i\mu_1\ldots\widehat{\mu_j}\ldots\mu_k}\partial_{\mu_j} C^{\sigma_1\ldots\sigma_i} + W_{\sigma_1\ldots\sigma_i\mu_1\ldots\mu_k}\partial_{\sigma_1} C^{\sigma_1\ldots\sigma_i}\Big)
\end{aligned} \tag{4.17}$$

analogamente alla (4.13). Se ne deduce che una qualunque densità scalare ottenuta mediante contrazione completa dei $g^{\mu\nu}_{\rho_1\ldots\rho_k}(x)$ con un'espressione tensoriale funzione degli altri campi del modello dà origine a un termine la cui variazione BRS è una derivata totale (cfr. (4.16)), e che pertanto appartiene alla co-omologia di δ modulo d.

È quindi evidente che, costruendo l'azione classica in questo modo, essa risulta automaticamente invariante sotto le trasformazioni (3.9), il che genera l'identità di Slavnov (classica):

$$\delta S^{\natural} = 0$$

ovvero

$$\begin{aligned}\int \sum_{j=1}^{N} \Big(& \mathrm{s}A^{\mu_1\ldots\mu_j}(x)\frac{\delta S^{\natural}}{\delta A^{\mu_1\ldots\mu_j}(x)} + \mathrm{s}A_{\mu_1\ldots\mu_j}(x)\frac{\delta S^{\natural}}{\delta A_{\mu_1\ldots\mu_j}(x)} + \\ & + \mathrm{s}\Gamma^{\mu_1\ldots\mu_j}_{\nu\lambda}(x)\frac{\delta S^{\natural}}{\delta \Gamma^{\mu_1\ldots\mu_j}_{\nu\lambda}(x)} + \mathrm{s}C^{\mu_1\ldots\mu_j}(x)\frac{\delta S^{\natural}}{\delta C^{\mu_1\ldots\mu_j}(x)} + \\ & + \mathrm{s}g^{\rho\sigma}_{\mu_1\ldots\mu_j}(x)\frac{\delta S^{\natural}}{\delta g^{\rho\sigma}_{\mu_1\ldots\mu_j}(x)}\Big)\,\mathrm{d}^n x = 0\end{aligned} \tag{4.18}$$

A questo punto occorre procedere alla costruzione vera e propria di $S^{\natural}$. Stante i discorsi precedenti, la ricetta è estremamente facile: si costruiscono tutte le quantità tensoriali che è possibile ottenere mediante contrazione dei vari campi fisici $A^{(k)}$, $A_{(k)}$ e $\Gamma^{(k)}_{\rho\lambda}$ e loro derivate covarianti (compatibilmente con i soliti vincoli sulla dimensione UV del lagrangiano: cfr. tabella 4.1) e si saturano queste quantità con le opportune densità $g^{\mu\nu}_{(k)}$. Notiamo che la dipendenza del lagrangiano da questi ultimi oggetti può sempre essere presa lineare, eventualmente scaricando le derivazioni sui campi saturati con esso mediante la solita procedura di integrazione per parti.

In generale, scriviamo

$$S^{\natural} = \int \sum_i \mathcal{L}_i(x)\,\mathrm{d}^n x \tag{4.19}$$

Le condizioni poste in precedenza individuano i seguenti lagrangiani: anzitutto vi è la parte che dipende solo dalle connessioni (e dalle loro derivate) mediante i tensori di Ricci generalizzati (2.33) e relative contrazioni multiple:

$$\mathcal{L}_1(x) = \sum_{j=0}^{N-1} g^{\mu\nu}_{\rho_1\ldots\rho_j}(x)\big(a_j\mathcal{R}^{\rho_1\ldots\rho_j}_{\mu\nu}(x) + \sum_{i=0}^{j} b_{ji}\mathcal{R}^{\lambda\rho_1\ldots\rho_i}_{\mu\sigma}(x)\mathcal{R}^{\sigma\rho_{i+1}\ldots\rho_j}_{\lambda\nu}(x) + \ldots\big) \tag{4.20}$$

(Si noti che altre contrazioni più esotiche sono possibili, come ad esempio un termine $\mathcal{R}^{\lambda\sigma\cdots}_{\mu\nu}(x)\mathcal{R}^{\cdots}_{\lambda\sigma}(x)$; questa è la ragione dei puntini di sospensione al termine della (4.20).)

Facendo entrare in gioco i campi di materia, vi sono poi i termini del tipo

$$\mathcal{L}_2(x) = \sum_{j=2}^{N} g^{\mu\nu}_{\rho_1\ldots\rho_j}(x)\big(\sum_{i=1}^{j} m_{ji} D_\mu A^{\rho_1\cdots\rho_i}(x) D_\nu A^{\rho_{i+1}\cdots\rho_j}(x)\big) \tag{4.21}$$

$$\mathcal{L}_3(x) = \sum_{j=0}^{N-1} g^{\mu\nu}_{\rho_1\ldots\rho_j}(x)\big(\sum_{i=1}^{N-j} n_{ji} D_\mu A^{\rho_1\cdots\rho_j\rho_{j+1}\cdots\rho_{j+i}}(x) D_\nu A_{\rho_{j+1}\cdots\rho_{j+i}}(x)\big) \tag{4.22}$$

$$\mathcal{L}_4(x) = \sum_{j=0}^{N-1} g^{\mu\nu}_{\rho_1\ldots\rho_j}(x)\big(\sum_{i=0}^{N-j-1} p_{ji} D_\lambda A^{\lambda\rho_1\cdots\rho_j\rho_{j+1}\cdots\rho_{j+i}}(x) D_\nu A_{\mu\rho_{j+1}\cdots\rho_{j+i}}(x)\big) \tag{4.23}$$

$$\mathcal{L}_5(x) = \sum_{j=0}^{N-2} g^{\mu\nu}_{\rho_1\ldots\rho_j}(x)\big(\sum_{i=0}^{N-j-2} q_{ji} D_\lambda A^{\lambda\sigma\rho_1\cdots\rho_j\rho_{j+1}\cdots\rho_{j+i}}(x) D_\sigma A_{\mu\nu\rho_{j+1}\cdots\rho_{j+i}}(x)\big) \tag{4.24}$$

e i termini in cui figurano le derivate seconde

$$\mathcal{L}_6(x) = \sum_{j=2}^{N} g^{\mu\nu}_{\rho_1\ldots\rho_j}(x)\Big(\sum_{i=1}^{j-1} A^{\rho_1\cdots\rho_i}(x) D_\mu D_\nu A^{\rho_{i+1}\cdots\rho_j}(x)\Big) \tag{4.25}$$

$$\mathcal{L}_7(x) = \sum_{j=0}^{N-1} g^{\mu\nu}_{\rho_1\ldots\rho_j}(x)\Big(\sum_{i=1}^{N-j} A^{\rho_1\cdots\rho_j\rho_{j+1}\cdots\rho_{j+i}}(x) D_\mu D_\nu A_{\rho_{j+1}\cdots\rho_{j+i}}(x) + \ldots\Big) \tag{4.26}$$

$$\mathcal{L}_8(x) = \sum_{j=0}^{N} g^{\mu\nu}_{\rho_1\ldots\rho_j}(x)\Big(\sum_{i=1}^{j-1} A_{\rho_1\cdots\rho_i}(x) D_\mu D_\nu A_{\rho_{i+1}\cdots\rho_j}(x) + \ldots\Big) \tag{4.27}$$

dove nuovamente, in generale, molti altri tipi di contrazione sono possibili. Infine ci sono i termini privi di derivate:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_9(x) = \sum_{j=0}^{N} g^{\mu\nu}_{\rho_1\ldots\rho_j}(x)\Big(&\sum_{i=1}^{N-j} \alpha_{ji} A^{\rho_1\cdots\rho_i}(x) A_{\mu\nu\rho_1\ldots\rho_j} + \\ &+ \sum \big(\beta_{ji} A^{\cdots}(x) A_{\cdots}(x) A^{\cdots}(x) A_{\cdots}(x) + \ldots\big)^{\mu\nu}_{\rho_1\ldots\rho_j}\Big)\end{aligned} \tag{4.28}$$

dove, ancora una volta, i puntini di omissione stanno a indicare tutte le possibili saturazioni compatibili con il posizionamento degli indici. Tutti questi termini possono figurare, a priori, nell'azione (4.19).

Per capire il significato dell'azione trovata sarebbe ovviamente necessario andare a studiare la dinamica dei campi determinata da ciascun termine. Grazie all'approccio scelto è particolarmente facile scrivere le equazioni del moto per le densità (4.12):

$$\frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}_{\rho_1\ldots\rho_k}(x)} S^\natural = 0$$

Senza scendere nei dettagli, la struttura generale è del tipo

$$\begin{aligned}
a_j \mathcal{R}^{\rho_1 \ldots \rho_j}_{\mu\nu}(x) + \sum_{i=0}^{j} b_{ji} \mathcal{R}^{\lambda\rho_1 \ldots \rho_i}_{\mu\sigma}(x) \mathcal{R}^{\sigma\rho_{i+1} \ldots \rho_j}_{\lambda\nu}(x) + \ldots = \\
= \sum_{i=1}^{j} m_{ji} D_\mu A^{\rho_1 \ldots \rho_i}(x) D_\nu A^{\rho_{i+1} \ldots \rho_j}(x) + \ldots + \\
+ \sum_{i=1}^{N-j} n_{ji} D_\mu A^{\rho_1 \ldots \rho_j \rho_{j+1} \ldots \rho_{j+i}}(x) D_\nu A_{\rho_{j+1} \ldots \rho_{j+i}}(x) + \ldots + \\
+ \sum_{i=1}^{j} A^{\rho_1 \ldots \rho_i}(x) D_\mu D_\nu A^{\rho_{i+1} \ldots \rho_j}(x) + \\
+ \sum_{i=1}^{N-j} A^{\rho_1 \ldots \rho_j \rho_{j+1} \ldots \rho_{j+i}}(x) D_\mu D_\nu A_{\rho_{j+1} \ldots \rho_{j+i}}(x) + \ldots + \ldots\ldots
\end{aligned} \tag{4.29}$$

che possono essere interpretate come una generalizzazione delle equazioni di Einstein della relatività generale che coinvolgono, oltre alle usuali curvature di Riemann, delle ulteriori curvature che riflettono la particolare geometria che stà sotto al modello.

4.3 Limite piatto

Per quanto riguarda gli altri campi del modello, in generale la scrittura delle loro equazioni del moto appare un problema di difficoltà proibitiva: è utile pertanto cercare di ricondursi prima di tutto a qualche caso particolare in cui il significato fisico dei vari oggetti coinvolti sia quantomeno intuibile.

In pratica la situazione più comoda da studiare è quella di una teoria definita sullo spazio-tempo di Minkowski. Ciò si traduce nell'imporre le due condizioni

$$\Gamma^{\mu_1 \ldots \mu_k}_{\lambda\nu}(x) \equiv 0 \qquad \forall k$$

e

$$g^{\mu\nu}_{\rho_1 \ldots \rho_k}(x) = \eta^{\mu\nu} \delta^k_0$$

con $\eta^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$.

Chiaramente con queste posizioni la (4.19) si semplifica drasticamente: $\mathcal{L}_1 = 0$ e le derivate covarianti si possono rimpiazzare con semplici derivate parziali. Inoltre l'assenza di indici bassi nelle g elimina la maggior parte delle possibili contrazioni (per esempio tutte quelle che figurano in (4.21)). Infine, i lagrangiani che contengono le derivate seconde dei campi (4.25)–(4.27) si possono riaccorpare nei termini precedenti, combinando opportunamente i coefficienti.

In definitiva, sopravvive al limite un'azione del tipo:

$$\begin{aligned} S^\natural = \int \Big(& \eta^{\mu\nu} \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \partial_\mu A^{\rho_1 \ldots \rho_i}(x) \partial_\nu A_{\rho_1 \ldots \rho_i}(x) + \\ & + \eta^{\mu\nu} \sum_{i=1}^{N-1} \beta_i \partial_\lambda A^{\lambda \rho_1 \ldots \rho_i}(x) \partial_\nu A_{\mu \rho_1 \ldots \rho_i}(x) + \\ & + \eta^{\mu\nu} \sum_{i=1}^{N-2} \gamma_i \partial_\lambda A^{\lambda \sigma \rho_1 \ldots \rho_i}(x) \partial_\sigma A_{\mu\nu \rho_1 \ldots \rho_i}(x) + \mathcal{L}_9 \Big) \end{aligned} \tag{4.30}$$

dove α_k, β_k e γ_k sono i coefficienti numerici di cui sopra.

Se prendiamo in considerazione in particolare la teoria libera, $\mathcal{L}_9 = 0$ e le equazioni del moto per i campi di materia diventano

$$\begin{aligned} -\frac{\delta S^\natural}{\delta A^{\rho_1 \ldots \rho_k}(x)} = & \alpha_k \partial^2 A_{\rho_1 \ldots \rho_k}(x) + \beta_{k-1} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \eta^{\mu\nu} \partial_{\mu_i} \partial_\nu A_{\mu \rho_1 \ldots \widehat{\rho_i} \ldots \rho_k}(x) + \\ & + \gamma_{k-2} \frac{1}{k(k-1)} \sum_{i \neq j = 1}^{k} \eta^{\mu\nu} \partial_{\rho_i} \partial_{\rho_j} A_{\mu\nu \rho_1 \ldots \widehat{\rho_i} \ldots \widehat{\rho_j} \ldots \rho_k}(x) = 0 \end{aligned} \tag{4.31}$$

per i campi covarianti, e

$$\begin{aligned} -\frac{\delta S^\natural}{\delta A_{\rho_1 \ldots \rho_k}(x)} = & \alpha_k \partial^2 A^{\rho_1 \ldots \rho_k}(x) + \beta_{k-1} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \eta^{\rho_i \nu} \partial_\nu \partial_\lambda A^{\lambda \rho_1 \ldots \widehat{\rho_i} \ldots \rho_k}(x) + \\ & + \gamma_{k-2} \frac{1}{k(k-1)} \sum_{i \neq j = 1}^{k} \eta^{\rho_i \rho_j} \partial_\sigma \partial_\lambda A^{\lambda \sigma \rho_1 \ldots \widehat{\rho_i} \ldots \widehat{\rho_j} \ldots \rho_k}(x) = 0 \end{aligned} \tag{4.32}$$

per i campi controvarianti.

D'altro canto, in una teoria di campo libera su spazio-tempo piatto ci si aspetta da argomenti di validità generale [5] che le equazioni del moto per i campi non siano altro che delle equazioni di Klein-Gordon (a massa nulla):

$$\begin{aligned} \partial^2 A_{\rho_1 \ldots \rho_k}(x) = 0 \\ \partial^2 A^{\rho_1 \ldots \rho_k}(x) = 0 \end{aligned}$$

La richiesta che le (4.31)–(4.32) si riducano alle precedenti ci suggerisce, per confronto diretto, le condizioni di gauge fixing (lineari)

$$\frac{\beta_{k-1}}{k}\sum_{i=1}^{k}\eta^{\mu\nu}\partial_{\mu_i}\partial_\nu A_{\mu\rho_1\ldots\widehat{\rho_i}\ldots\rho_k}(x)+\frac{\gamma_{k-2}}{k(k-1)}\sum_{i\neq j=1}^{k}\eta^{\mu\nu}\partial_{\rho_i}\partial_{\rho_j}A_{\mu\nu\rho_1\ldots\widehat{\rho_i}\ldots\widehat{\rho_j}\ldots\rho_k}(x)=0 \tag{4.33}$$

$$\frac{\beta_{k-1}}{k}\sum_{i=1}^{k}\eta^{\rho_i\nu}\partial_\nu\partial_\lambda A^{\lambda\rho_1\ldots\widehat{\rho_i}\ldots\rho_k}(x)+\frac{\gamma_{k-2}}{k(k-1)}\sum_{i\neq j=1}^{k}\eta^{\rho_i\rho_j}\partial_\sigma\partial_\lambda A^{\lambda\sigma\rho_1\ldots\widehat{\rho_i}\ldots\widehat{\rho_j}\ldots\rho_k}(x)=0 \tag{4.34}$$

per campi covarianti e controvarianti, rispettivamente.

Notiamo che la (4.31), una volta aggiustati in maniera opportuna i coefficienti (operazione a carico delle condizioni di rinormalizzazione, e quindi della teoria quantistica completa), coincide *formalmente* con l'equazione del moto di Fronsdal per un campo di spin k a massa nulla [31] ed è pertanto invariante sotto le trasformazioni di gauge ricordate nell'Introduzione:

$$\delta A_{\mu_1\ldots\mu_k}(x)=\delta^{\nu_1\ldots\nu_k}_{\mu_1\ldots\mu_k}\partial_{\nu_1}\xi_{\nu_2\ldots\nu_k}(x) \tag{4.35}$$

Questo è incoraggiante: nonostante l'approccio qui presentato sia per nascita orientato verso lo sviluppo di una teoria interagente, prendendo un opportuno limite si ritrova l'equazione del moto e la simmetria associata ad una teoria libera costruita partendo da basi completamente diverse.

È importante sottolineare che l'analogia tra la (4.31) e le equazioni del moto di Fronsdal è puramente formale finchè non si siano imposte anche per i nostri campi $A_{(k)}(x)$ le condizioni di irriducibilità di Fierz e Pauli [15], il cui scopo è quello di eliminare i gradi di libertà non fisici associati agli stati la cui elicità non è massimale:

$$\eta^{\rho_1\nu}\partial_\nu A_{\rho_1\ldots\rho_k}(x)=0$$
$$\eta^{\rho_1\rho_2}A_{\rho_1\ldots\rho_k}(x)=0$$

Ad ogni modo ribadiamo che la simmetria (4.35) viene da noi recuperata solo ed esclusivamente nel limite di teoria *libera*, che del resto è l'ambito nel quale essa è nata.

4.4 Estensione quantistica del modello

Possiamo ora sfruttare i risultati ottenuti nell'analisi della co-omologia dell'operatore BRS per studiare le proprietà dell'estensione quantistica del modello classico messo a punto in precedenza.

Il primo passo consiste, come detto, nel costruire l'azione effettiva Γ a partire dall'azione classica S. Siccome le trasformazioni BRS dei campi sono espresse da operatori compositi, è necessario introdurre delle opportune sorgenti (BRS-invarianti) e dei termini di accoppiamento con i campi del modello. Siamo dunque portati a considerare, come azione effettiva all'ordine nullo in $\hbar$, la seguente espressione:

$$\begin{aligned}\Gamma_0 = S + \int \sum_{j=1}^{N} \Big(& \gamma_{\mu_1 \ldots \mu_j}(x)\, \mathrm{s}A^{\mu_1 \ldots \mu_j}(x) + \gamma^{\mu_1 \ldots \mu_j}(x)\, \mathrm{s}A_{\mu_1 \ldots \mu_j}(x) + \\ & + \delta^{\rho\sigma}_{\mu_1 \ldots \mu_j}(x)\, \mathrm{s}\Gamma^{\mu_1 \ldots \mu_j}_{\rho\sigma}(x) + \epsilon_{\mu_1 \ldots \mu_j}(x)\, \mathrm{s}C^{\mu_1 \ldots \mu_j}(x) + \\ & + \eta^{\mu_1 \ldots \mu_j}_{\rho\sigma}(x)\, \mathrm{s}g^{\rho\sigma}_{\mu_1 \ldots \mu_j}(x) \Big)\, \mathrm{d}^n x \end{aligned} \tag{4.36}$$

in cui S è l'azione classica (4.19) (si noti che non consideriamo termini di gauge fixing).

I campi introdotti, assieme alle loro principali caratteristiche, sono riepilogati nella tabella 4.2.

	$A^{(k)}$	$C^{(k)}$	$A_{(k)}$	$\Gamma^{(k)}_{\nu\rho}$	$g^{\mu\nu}_{(k)}$	$\gamma_{(k)}$	$\gamma^{(k)}$	$\delta^{\rho\sigma}_{(k)}$	$\epsilon_{(k)}$	$\eta^{(k)}_{\rho\sigma}$
Dimensione UV	1	0	1	1	0	3	3	3	4	4
Carica di F.P.	0	1	0	0	0	-1	-1	-1	-2	0

Tabella 4.2: Caratteristiche dei campi del modello

A questo punto si attiva il meccanismo della teoria delle perturbazioni, definendo il funzionale Γ come una serie di potenze formale in $\hbar$:

$$\Gamma = \sum_{n=0}^{\infty} \hbar^n \Gamma_{(n)}$$

L'invarianza BRS della teoria è espressa dalla versione funzionale dell'identità di Slavnov:

$$\delta\Gamma = 0$$

ovvero

$$\begin{aligned}\delta\Gamma = \int \sum_{j=1}^{N} \Bigg(& \frac{\delta\Gamma}{\delta\gamma_{\mu_1 \ldots \mu_j}(x)} \frac{\delta\Gamma}{\delta A^{\mu_1 \ldots \mu_j}(x)} + \frac{\delta\Gamma}{\delta\gamma^{\mu_1 \ldots \mu_j}(x)} \frac{\delta\Gamma}{\delta A_{\mu_1 \ldots \mu_j}(x)} + \\ & + \frac{\delta\Gamma}{\delta\delta^{\rho\sigma}_{\mu_1 \ldots \mu_j}(x)} \frac{\delta\Gamma}{\delta\Gamma^{\mu_1 \ldots \mu_j}_{\rho\sigma}(x)} + \frac{\delta\Gamma}{\delta\epsilon_{\mu_1 \ldots \mu_j}(x)} \frac{\delta\Gamma}{\delta C^{\mu_1 \ldots \mu_j}(x)} + \\ & + \frac{\delta\Gamma}{\delta\eta^{\mu_1 \ldots \mu_j}_{\rho\sigma}(x)} \frac{\delta\Gamma}{\delta g^{\rho\sigma}_{\mu_1 \ldots \mu_j}(x)} \Bigg)\, \mathrm{d}^n x \end{aligned} \tag{4.37}$$

Questo operatore va, com'è usuale, *linearizzato*; ciò corrisponde a definire un nuovo operatore δ_L secondo la posizione

$$\delta_L\Gamma := \frac{1}{2}\int\sum_{j=1}^{N}\Bigg(\frac{\delta\Gamma}{\delta\gamma_{\mu_1\ldots\mu_j}(x)}\frac{\delta}{\delta A^{\mu_1\ldots\mu_j}(x)}+\frac{\delta\Gamma}{\delta A^{\mu_1\ldots\mu_j}(x)}\frac{\delta}{\delta\gamma_{\mu_1\ldots\mu_j}(x)}+ \\ +\frac{\delta\Gamma}{\delta\gamma^{\mu_1\ldots\mu_j}(x)}\frac{\delta}{\delta A_{\mu_1\ldots\mu_j}(x)}+\frac{\delta\Gamma}{\delta A_{\mu_1\ldots\mu_j}(x)}\frac{\delta}{\delta\gamma^{\mu_1\ldots\mu_j}(x)}+ \\ +\frac{\delta\Gamma}{\delta\delta^{\rho\sigma}_{\mu_1\ldots\mu_j}(x)}\frac{\delta}{\delta\Gamma^{\mu_1\ldots\mu_j}_{\rho\sigma}(x)}+\frac{\delta\Gamma}{\delta\Gamma^{\mu_1\ldots\mu_j}_{\rho\sigma}(x)}\frac{\delta}{\delta\delta^{\rho\sigma}_{\mu_1\ldots\mu_j}(x)}+ \\ +\frac{\delta\Gamma}{\delta\epsilon_{\mu_1\ldots\mu_j}(x)}\frac{\delta}{\delta C^{\mu_1\ldots\mu_j}(x)}+\frac{\delta\Gamma}{\delta C^{\mu_1\ldots\mu_j}(x)}\frac{\delta}{\delta\epsilon_{\mu_1\ldots\mu_j}(x)}+ \\ +\frac{\delta\Gamma}{\delta\eta^{\mu_1\ldots\mu_j}_{\rho\sigma}(x)}\frac{\delta}{\delta g^{\rho\sigma}_{\mu_1\ldots\mu_j}(x)}+\frac{\delta\Gamma}{\delta g^{\rho\sigma}_{\mu_1\ldots\mu_j}(x)}\frac{\delta}{\delta\eta^{\mu_1\ldots\mu_j}_{\rho\sigma}(x)}\Bigg)\,\mathrm{d}^n x \quad (4.38)$$

Chiaramente

$$\delta_L^2 = 0$$

Dalla definizione (4.38) si può leggere l'azione dell'operatore di Slavnov linearizzato (che, con lieve abuso di notazione, chiameremo ancora s) sulle sorgenti.

Possiamo ora vedere esplicitamente come le identità di Slavnov relative ai ghost di rango superiore al primo vengano mantenute nella teoria quantistica (ordine per ordine in $\hbar$). Per esempio all'ordine più basso si ha

$$\delta_L\Gamma = \hbar\int\Delta(x)\,\mathrm{d}^n x$$

e quindi, se $j \geq 2$,

$$\frac{\delta}{\delta C^{\mu_1\ldots\mu_j}(x)}\delta_L\Gamma = \hbar\frac{\delta}{\delta C^{\mu_1\ldots\mu_j}(x)}\int\Delta(x)\,\mathrm{d}^n x = 0$$

perchè la co-omologia di δ è vuota in tali settori.

Se ora definiamo gli operatori di Ward linearizzati $\mathcal{W}$, ovvero gli operatori di Ward associati a δ_L:

$$(\mathcal{W}_{(n)})_{\mu_1\ldots\mu_j}(x) := \left\{\delta_L^{(n)}, \frac{\delta}{\delta C^{\mu_1\ldots\mu_j}(x)}\right\}$$

dove n è l'ordine di δ in $\hbar$, possiamo scrivere

$$(\mathcal{W}_{(0)})_{\mu_1\ldots\mu_j}(x)\;\Gamma_{(1)}\big|_{\text{sorgenti}=0} = 0$$

per $j = 2\ldots N$.

Naturalmente l'argomento precedente fallisce quando $j = 1$, nel qual caso si ha a che fare con la nota anomalia associata ai diffeomorfismi. All'ordine più basso si ha

$$(\mathcal{W}_0)_\mu(x)\ \Gamma_{(1)}\big|_{\text{sorgenti}=0} = \hbar\alpha\partial_\nu\Sigma^\nu_\mu(x)$$

dove Σ è l'elemento della co-omologia di δ nel settore appropriato. Per esempio in uno spazio-tempo di dimensione $n = 4$ risulta [4]

$$\mathcal{W}_\mu(x)\Gamma = \hbar\alpha\varepsilon^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}\partial_{\lambda_1}\left(\partial_{\alpha_1}\Gamma^{\lambda_3}_{\alpha_2\mu}(x)\left(\partial_{\alpha_3}\Gamma^{\lambda_1}_{\alpha_4\lambda_3}(x) + \frac{1}{2}\Gamma^{\lambda_4}_{\alpha_3\lambda_2}(x)\Gamma^{\lambda_1}_{\alpha_4\lambda_4}(x)\right)\right)$$

Si ricordi però che la co-omologia di δ contiene solo ed esclusivamente le connessioni *ordinarie*, cioè con un solo indice controvariante (cfr. Proposizione 3.6), la cui variazione coinvolge unicamente le derivate dei ghost del primo ordine. Ne segue che l'anomalia stessa è invariante sotto l'azione degli operatori di Ward di rango $j \geq 2$, ed è quindi "stabile" rispetto al resto dell'algebra di simmetria:

$$(\mathcal{W}_0)_{\mu_1\ldots\mu_j}(x)\big(\hbar\alpha\partial_\nu\Sigma^\nu_\mu(x)\big) = 0 \quad (j \geq 2)$$

Ovviamente agli ordini successivi la situazione va indagata in maniera più approfondita in quanto la presenza di un'anomalia, in generale, destabilizza l'intera costruzione; ma la condizione precedente è un buon requisito per una risposta positiva in un opportuno schema di rinormalizzazione.

Conclusioni

Nel mio lavoro di tesi ho proposto una nuova possibile simmetria che possa servire da base per una teoria di campo che coinvolga campi tensoriali di rango arbitrariamente alto. L'idea fondamentale della costruzione, che emerge in maniera naturale dagli artifici simplettici del capitolo 1, è che le trasformazioni di simmetria devono legare fra di loro l'intera torre dei tensori simmetrici, e lo stesso deve accadere per i ghost BRS.

Un passaggio molto importante è l'introduzione della notazione a indici multipli operata nel capitolo 3, tramite la quale l'algebra delle trasformazioni di simmetria trovate si rivela essere del tutto analoga a quella delle ordinarie riparametrizzazioni (diffeomorfismi), in cui però i singoli indici tensoriali vengono rimpiazzati da delle stringhe di indici completamente simmetriche.

Ne deriva la costruzione di una nuova geometria (connessioni, curvature, ecc.), e i risultati sulla co-omologia ottenuti nella seconda parte della tesi appaiono promettenti per ulteriori sviluppi.

Il modello proposto nel capitolo 4 è chiaramente solo un primissimo approccio al problema di sviluppare una teoria di gauge basata su tale simmetria e può essere definito, nell'usuale gergo, come un "modello giocattolo" (toy model). Ovviamente a questo stadio non è affatto chiaro se la simmetria qui proposta sia effettivamente realizzata in Natura o meno, ma il tentativo è sembrato comunque degno di essere fatto.

Bibliografia

[1] Luis Alvarez-Gaume e Edward Witten. Gravitational anomalies. *Nucl. Phys.*, B234:269, 1984.

[2] G. Bandelloni, C. Becchi, A. Blasi e R. Collina. Local approach to dilatation invariance. *Nucl. Phys.*, B197:347, 1982.

[3] G. Bandelloni e S. Lazzarini. W-algebras from symplectomorphisms. *J. Math. Phys.*, 41:2233–2250, 2000.

[4] Giuseppe Bandelloni. Diffeomorphism cohomology in quantum field theory models. *Phys. Rev.*, D38:1156–1168, 1988.

[5] V. Bargmann e Eugene P. Wigner. Group theoretical discussion of relativistic wave equations. *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 34:211, 1948.

[6] C. Becchi, A. Rouet e R. Stora. Renormalization of gauge theories. *Annals Phys.*, 98:287–321, 1976.

[7] Reinhold A. Bertlmann. *Anomalies in Quantum Field Theory.* Oxford University Press, 1996.

[8] Yvonne Choquet-Bruhat e Cécile DeWitt-Morette. *Analysis, Manifolds and Physics*, volume 1. Elsevier, 1982.

[9] Bernard de Wit e Daniel Z. Freedman. Systematics of higher spin gauge fields. *Phys. Rev.*, D21:358, 1980.

[10] S. Deser e B. Zumino. Consistent supergravity. *Phys. Lett.*, B62:335, 1976.

[11] Bryce S. DeWitt. *Dynamical Theory of Groups and Fields.* Gordon and Breach, 1965.

[12] P. A. M. Dirac. *Proc. Roy. Soc. London*, 155 A:447, 1936.

[13] J. Fang e C. Fronsdal. Massless fields with half integral spin. *Phys. Rev.*, D18:3630, 1978.

[14] J. Fang e C. Fronsdal. Deformation of gauge groups. gravitation. *J. Math. Phys.*, 20:2264–2271, 1979.

[15] M. Fierz e W. Pauli. On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field. *Proc. Roy. Soc. Lond.*, A173:211–232, 1939.

[16] Dario Francia e C. M. Hull. Higher-spin gauge fields and duality. *hep-th/0501236*, 2005.

[17] Dario Francia e Augusto Sagnotti. Free geometric equations for higher spins. *Phys. Lett.*, B543:303–310, 2002.

[18] Dario Francia e Augusto Sagnotti. On the geometry of higher-spin gauge fields. *Class. Quant. Grav.*, 20:S473–S486, 2003.

[19] Theodore Frankel. *The geometry of physics: an introduction.* Cambridge university press, seconda edizione, 2004.

[20] Daniel Z. Freedman e P. van Nieuwenhuizen. Properties of supergravity theory. *Phys. Rev.*, D14:912, 1976.

[21] Christian Fronsdal. Massless fields with integer spin. *Phys. Rev.*, D18:3624, 1978.

[22] S. N. Gupta. Gravitation and electromagnetism. *Phys. Rev.*, 96:1683, 1954.

[23] Michael E. Peskin e Daniel V. Schroeder. *An Introduction to Quantum Field Theory.* Perseus Books Publishing, 1995.

[24] Olivier Piguet e Silvio P. Sorella. *Algebraic Renormalization.* Springer-Verlag, 1995.

[25] Pierre Ramond. *Quantum Field Theory: A Modern Primer.* Addison-Wesley, seconda edizione, 1990.

[26] W. Rarita e Julian S. Schwinger. On a theory of particles with half integral spin. *Phys. Rev.*, 60:61, 1941.

[27] A. Sagnotti, E. Sezgin e P. Sundell. On higher spins with a strong Sp(2,R) condition. *hep-th/0501156*, 2005.

[28] A. Sagnotti e M. Tsulaia. On higher spins and the tensionless limit of string theory. *Nucl. Phys.*, B682:83–116, 2004.

[29] L. P. S. Singh e C. R. Hagen. Lagrangian formulation for arbitrary spin. 1. The boson case. *Phys. Rev.*, D9:898–909, 1974.

[30] L. P. S. Singh e C. R. Hagen. Lagrangian formulation for arbitrary spin. 2. The fermion case. *Phys. Rev.*, D9:910–920, 1974.

[31] Dmitri Sorokin. Introduction to the classical theory of higher spins. *AIP Conf. Proc.*, 767:172–202, 2005.

[32] Raymond Stora. Algebraic structure and topological origin of anomalies, in *Progress in gauge field theory.* A cura di G. 't Hooft, A. Jaffe, H. Lehmann, P. K. Mitter, I. M. Singer e R. Stora. Plenum Press, 1984.

Ringraziamenti

Per prima cosa desidero ringraziare il mio relatore Beppe Bandelloni per la disponibilità e la pazienza che ha avuto nell'iniziarmi ai segreti della simmetria BRS e nello spiegarmi (spesso più di una volta) gli oscuri meccanismi della co-omologia, con uno stile molto personale e accompagnando ogni riferimento ai lavori originali con impagabili aneddoti riguardo ai loro autori.

Un altro grande ringraziamento lo devo al mio correlatore Nicola Maggiore: purtroppo la mia innata disorganizzazione ha fatto sì che in questi mesi di lavoro le interazioni tra noi siano state troppo sporadiche, e di questo non potrò mai pentirmi abbastanza.

Le ultime settimane sono state particolarmente convulse; colgo quindi l'occasione per ringraziare la segreteria del DIFI, e in particolare la signora Callero per la disponibilità (e per la pinzatrice!) e il signor Ghiotto per il proiettore, e lo staff della biblioteca del dipartimento: l'ormai pantofolato Dottor Fenzi e Angelo Poggio.

Vorrei poi ringraziare tutti i miei compagni di corso per le tante scene divertenti che mi hanno regalato in questi anni durante e dopo le lezioni; e quando dico tutti intendo proprio *tutti*, da quelli che sono rimasti solo il primo anno (come dimenticare ad esempio il mitico Pierangelo e i suoi racconti di *abductions* aliene?) a quelli che sono arrivati fino in fondo o quasi. E, in ordine rigorosamente sparso, vorrei citare: Serena, in compagnia della quale ho trascorso buona parte del primo anno, nonchè mia valida assistente nei laboratori di esp1; Michele, mio compagno di tanti viaggi (e qualche disavventura) in treno; Luca R., con cui mi sono più volte attardato nei quarti d'ora accademici a sparlare dei professori fino a un attimo prima che questi entrassero in aula (e a volte anche oltre); Simone il biker e Roberto il bibliofilo (nonchè teorico riciclatosi come sperimentale in attesa di esperimento), che ho ripetutamente importunato per cinque lunghi anni con (oltre alla mia compagnia) richieste di spiegazioni sugli argomenti più disparati; Pimpa (come vedi nessun ringraziamento, sarcastico o meno, a trenitalia: non vorrei che proprio il giorno della discussione...); Giovanna, che ha contribuito ad allietare le giornate trascorse al DIFI con la sua bell...ehm, simpatia; Claudio, con cui ho condiviso le pene di esp3 (si fa per dire, dato che ad ogni laboratorio arrivavo sempre due ore dopo per seguire Massa...), la cui capacità di prendere tutto con la massima (auto)ironia è più rara di un decadimento $\pi^0 \to e^+e^-$; Luca

T., il cui intervento è stato più volte provvidenziale quando durante le lezioni degli ultimi due anni il sonno cominciava a prendere il sopravvento, e Beppe (in vostra compagnia persino il cibo della mensa diventava mangiabile); e poi Francesca, Giacomo, Antonio, Daniela, Carlo e tutti quelli che ho involontariamente dimenticato.

Un ringraziamento speciale a Marietta, che mi ha ospitato durante una trasferta triestina che, nonostante l'esito finale, rimarrà comunque per me indimenticabile, e un saluto alla colonia genovese di fisici matematici lì presente (Paolo, Mattia, Lucio) e a tutti i ragazzi che ho conosciuto in quei giorni.

Passando agli affetti familiari, un grazie speciale va a mia madre e mio padre, che non hanno (quasi) mai dubitato che il giorno della laurea sarebbe infine arrivato, e non hanno (stavolta sì) mai chiesto nulla in cambio di tutto ciò che mi hanno dato in questi anni. Grazie al mio fratellone Armando, che non mi ha mai fatto mancare consigli sull'Università da "insider", e grazie a Simona per il sostegno nei primi anni (e per i libri); grazie anche ai piccoli Francesco e Daniele per avermi sempre messo di buonumore con la loro straordinaria vitalità.

Grazie ai miei amici "ingegneri", o sedicenti tali: Davide (lo so che i miei ringraziamenti non sono all'altezza dei tuoi, per via dell'assenza di Ihsan e soci... vorrà dire che mi farò perdonare mandandoti in anteprima il preprint dell'articolo in cui troverò le soluzioni esatte dell'equazione di Navier-Stokes, ok?), Giovanni, Gabriele, Paolo (niente citazione dei Marlene in terza pagina, sorry...) e tutti gli occasionali compagni di viaggio in treno (vi mancheranno i miei salaci commenti mentre perdete anche le mutande a cirulla... o no?); e infine grazie ai miei ex-compagni di liceo, che è sempre un piacere rivedere, con un triste ricordo per William, mio compagno di banco per un anno e mezzo, che non è più tra noi: questo lavoro è dedicato anche a lui.