Le rappresentazioni proiettive irriducibili del gruppo di Galileo

Alberto Tacchella

29 Luglio 2004

1 Il gruppo di Galileo e i suoi sottogruppi notevoli

Nello spazio-tempo Newtoniano $\mathcal{V}_4$ sia dato un generico sistema di coordinate $(\vec{x}, t)$ con $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ e $t \in \mathbb{R}$. Una **trasformazione di Galileo disomogenea** è una qualunque applicazione $g : (\vec{x}, t) \mapsto (\vec{x}', t')$ che si possa scrivere come

$$\begin{cases} \vec{x}' = R\vec{x} + \vec{v}t + \vec{a} \\ t' = t + b \end{cases} \tag{1}$$

dove $R \in SO(3)$ è una rotazione propria dello spazio fisico, $\vec{v}, \vec{a} \in \mathbb{R}^3$ e $b \in \mathbb{R}$. L'insieme di tutte le trasformazioni (1), unitamente all'usuale operazione di composizione tra applicazioni, forma il **gruppo di Galileo disomogeneo** che indicheremo d'ora in poi con G.

Per brevità denoteremo nel seguito la generica trasformazione (1) con la quadrupla $(R, b, \vec{v}, \vec{a})$; la composizione delle due trasformazioni $g = (R, b, \vec{v}, \vec{a})$ e $g' = (R', b', \vec{v}', \vec{a}')$ si scrive allora

$$gg' = (RR', b + b', \vec{v} + R\vec{v}', \vec{a} + R\vec{a}' + b'\vec{v})$$

L'identità del gruppo è $(I, 0, \vec{0}, \vec{0})$ mentre l'inverso di $g = (R, b, \vec{v}, \vec{a})$ è

$$g^{-1} = (R^{-1}, -b, -R^{-1}\vec{v}, -R^{-1}(\vec{a} - b\vec{v}))$$

Nel gruppo G possiamo individuare diversi sottogruppi interessanti. Consideriamo anzitutto le **traslazioni spazio-temporali**:

$$\begin{cases} \vec{x}' = \vec{x} + \vec{a} \\ t' = t + b \end{cases}$$

che sono associate a quadruple del tipo $(I, b, \vec{0}, \vec{a})$. Si tratta, com'è immediato verificare, di un sottogruppo chiuso, normale e abeliano di G (in effetti isomorfo a $\mathbb{R}^4$) che indichiamo con A.

Ci sono poi le **trasformazioni di Galileo omogenee**:

$$\begin{cases} \vec{x}' = R\vec{x} + \vec{v}t \\ t' = t \end{cases}$$

cui si associano quadruple del tipo $(R, 0, \vec{v}, \vec{0})$. Esse definiscono un sottogruppo chiuso di G che chiameremo il **gruppo di Galileo omogeneo** e indicheremo con G_0.

Osserviamo che G è prodotto semidiretto di A e G_0. Infatti essi generano l'intero gruppo non omogeneo:

$$(I, b, \vec{0}, \vec{a})(R, 0, \vec{v}, \vec{0}) = (R, b, \vec{v}, \vec{a})$$

e inoltre G_0 agisce su A tramite aggiunzione:

$$\begin{aligned}(R, 0, \vec{v}, \vec{0})(I, b, \vec{0}, \vec{a})(R, 0, \vec{v}, \vec{0})^{-1} &= (R, 0, \vec{v}, \vec{0})(I, b, \vec{0}, \vec{a})(R^{-1}, 0, -R^{-1}\vec{v}, \vec{0}) \\ &= (R, b, \vec{v}, R\vec{a} + b\vec{v})(R^{-1}, 0, -R^{-1}\vec{v}, \vec{0}) \\ &= (I, b, \vec{0}, R\vec{a} + b\vec{v})\end{aligned} \tag{2}$$

La (2) esibisce esplicitamente la struttura del prodotto semidiretto $G = A \times' G_0$.

Il gruppo omogeneo G_0 non è semisemplice: infatti il suo sottoinsieme formato dalle quadruple del tipo $(I, 0, \vec{v}, \vec{0})$, dette **trasformazioni di boost galieliane**, forma un sottogruppo chiuso di G_0 normale ed abeliano (isomorfo a $\mathbb{R}^3$), che chiamiamo V. G_0 contiene anche un sottogruppo isomorfo a $SO(3)$, dato dalle quadruple $(R, 0, \vec{0}, \vec{0})$; inoltre

$$(I, 0, \vec{v}, \vec{0})(R, 0, \vec{0}, \vec{0}) = (R, 0, \vec{v}, \vec{0})$$

e

$$(R, 0, \vec{0}, \vec{0})(I, 0, \vec{v}, \vec{0})(R, 0, \vec{0}, \vec{0})^{-1} = (I, 0, R\vec{v}, \vec{0})$$

Questo dimostra che G_0 stesso è un prodotto semidiretto: $G_0 = V \times' SO(3)$.

Per quanto riguarda le caratteristiche topologiche, il gruppo di Galileo disomogeneo G è connesso ma non semplicemente connesso. Il suo gruppo di ricoprimento universale, che denotiamo G^*, si ottiene sostituendo, nella scomposizione di G in prodotti semidiretti, il gruppo delle rotazioni $SO(3)$ con il suo ricoprimento universale $SU(2)$. Esplicitamente il generico $g^* \in G^*$ si scrive

$$g^* = (h, b, \vec{v}, \vec{a})$$

con $h \in SU(2)$. Detto δ l'omomorfismo di ricoprimento del gruppo delle rotazioni, la legge di composizione per G^* diventa

$$(h, b, \vec{v}, \vec{a})(h', b', \vec{v}', \vec{a}') = (hh', b + b', \delta(h)\vec{v}' + \vec{v}, \vec{a} + \delta(h)\vec{a}' + b'\vec{v})$$

Ovviamente per G^* continuano a valere tutte le conclusioni raggiunte in precedenza, in particolare risulterà $G^* = A \times' G_0^*$, dove G_0^* è il ricoprimento universale del gruppo di Galileo omogeneo, ed inoltre $G_0^* = V \times' SU(2)$.

2 Posizione del problema

Una delle idee fondamentali della meccanica quantistica è che il requisito *fisico* di invarianza di un sistema sotto un determinato gruppo di trasformazioni G si traduca nel requisito *matematico* di esistenza di una rappresentazione di G sul gruppo $\mathrm{Aut}(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$, dove $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ è la *logica* dello spazio di Hilbert associato al sistema. Se poi G è un gruppo di Lie connesso (o meglio, se ci si limita a richiedere l'invarianza rispetto alle trasformazioni che appartengono alla componente connessa all'identità di G), allora è sufficiente studiare le rappresentazioni di G nel *gruppo proiettivo* P associato ad $\mathcal{H}$. Esso è definito come il quoziente

$$P = U/Z$$

dove U è il gruppo degli operatori unitari su $\mathcal{H}$ e Z è il suo sottogruppo (normale) degli operatori multipli dell'identità.

Le rappresentazioni di G su P si possono mettere in corrispondenza biunivoca con le rappresentazioni unitarie *proiettive* di G su $\mathcal{H}$ come segue: sia π la proiezione canonica da U a P che a ciascun operatore unitario associa la sua classe di equivalenza rispetto a Z. Allora, se

$$g \mapsto u_g : G \longrightarrow P$$

è una rappresentazione di G in P (tecnicamente, un omomorfismo di Borel), esiste una rappresentazione unitaria proiettiva U di G in $\mathcal{H}$ tale che

$$u = \pi \circ U$$

Viceversa, data una qualunque rappresentazione unitaria proiettiva U allora $\pi \circ U$ è un omomorfismo di G in P.

Il problema di studiare i sistemi quantistici invarianti per trasformazioni di Galileo disomogenee diventa allora quello di determinare le rappresentazioni unitarie proiettive di G sullo spazio di Hilbert $\mathcal{H}$, cioè le corrispondenze $g \mapsto U_g$ tali che

$$U_g U_h = m(g,h) U_{gh}$$

L'applicazione $m : G \times G \to \mathbb{U}$ (dove $\mathbb{U}$ è il gruppo dei numeri complessi di modulo unitario) si dirà un **moltiplicatore** (locale) per il gruppo G. Il moltiplicatore identicamente uguale ad 1 si dice **banale**; chiaramente le rappresentazioni proiettive vere e proprie sono tutte e sole quelle associate a moltiplicatori non banali.

Sia ora dato un gruppo G e un suo moltiplicatore non banale m; si dice **estensione centrale** di G definita da m il gruppo, che denotiamo G_m, i cui elementi sono le coppie (g,z) con $g \in G$ e $z \in \mathbb{U}$, e in cui il prodotto è definito come segue:

$$(g,z)(g',z') = (gg', m(g,g')zz')$$

Supponiamo che $g \mapsto U_g$ sia una rappresentazione proiettiva di G con moltiplicatore m, allora è evidente che l'applicazione

$$(g,z) \mapsto zU_g$$

è una rappresentazione *ordinaria* dell'estensione centrale G_m. Inversamente, se $(g,z) \mapsto V_{g,z}$ è una rappresentazione ordinaria di G_m tale che

$$V_{e,z} = zI \quad \forall z \in \mathbb{U} \tag{3}$$

possiamo definire $U_g = V_{g,1}$ e otteniamo così che

$$U_g U_h = V_{g,1} V_{h,1} = V_{gh,m(g,h)} = V_{e,m(g,h)} V_{gh,1} = m(g,h) U_{gh}$$

quindi $g \mapsto U_g$ è una rappresentazione proiettiva di G con moltiplicatore m, e inoltre $V_{g,z} = zU_g$.

Se ne conclude che il problema di determinare le rappresentazioni proiettive di G si riconduce al problema di determinare i moltiplicatori non equivalenti di G e di studiare le rappresentazioni, stavolta ordinarie, delle estensioni centrali di G definite da tali moltiplicatori che soddisfino la (3).

Nel caso particolare in cui G è il gruppo di Galileo disomogeneo c'è una complicazione data dal fatto che G *non è semplicemente connesso*; ciò costituisce un grave ostacolo alla possibilità di scrivere esplicitamente i suoi moltiplicatori. Per ovviare a questo problema studieremo, invece che G, il già definito gruppo di ricoprimento universale G^*, che è semplicemente connesso per definizione.

Ci si deve ovviamente chiedere se il passaggio a un gruppo più grande non introduca nuove rappresentazioni prive di significato fisico. La risposta è *negativa*, grazie alla particolare natura dell'omomorfismo di ricoprimento δ. Infatti risulta

$$\ker\delta = (\pm I, 0, \vec{0}, \vec{0}) \simeq \mathbb{Z}_2$$

Mostriamo che, grazie a ciò, sussiste una corrispondenza biunivoca tra rappresentazioni unitarie proiettive di G^* e omomorfismi di Borel da G in P del tutto analoga a quella stabilita in precedenza.

Consideriamo il generico omomorfismo $g \mapsto u_g$ e la rappresentazione proiettiva $g \mapsto V_g$ determinata da u. Essa può essere "sollevata" a una rappresentazione proiettiva $\tilde{V}$ di G^* definendo

$$\tilde{V}_{g^*} = V_{\delta(g^*)} \quad \forall g^* \in G^*$$

Inversamente, se $g^* \mapsto \tilde{V}_{g^*}$ è una rappresentazione proiettiva di G^* su $\mathcal{H}$, possiamo costruire un omomorfismo di Borel nella maniera seguente: preso $g \in G$ scegliamo uno dei due $g^* \in G^*$ per cui $\delta(g^*) = g$ e definiamo

$$g \mapsto u_g = \pi \circ \tilde{V}_{g^*}$$

Per la particolare forma di $\ker\delta$, l'ambiguità nella scelta di g^* risulta solo nel cambiamento $\pm\tilde{V}_{g^*}$; ma l'applicazione $\pi \circ \tilde{V}_{g^*}$ cancella tale ambiguità di segno proiettando l'operatore $\tilde{V}_{g^*}$ nella sua classe di equivalenza.

La determinazione vera e propria dei moltiplicatori inequivalenti di G^* è un problema tecnico di teoria dei gruppi di Lie che non ci interessa affrontare in questa sede, per cui ci limitiamo a riportarne il risultato finale. Presi $g = (h, b, \vec{v}, \vec{a})$ e $g' = (h', b', \vec{v}', \vec{a}') \in G^*$, risulta che per ogni $M \in \mathbb{R}$ l'applicazione

$$m_M : (g, g') \mapsto e^{iM(\frac{1}{2}b'\vec{v}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\delta(h)\vec{a}')} \tag{4}$$

è un moltiplicatore di G^*, e *ogni* moltiplicatore di G^* è equivalente ad un qualche m_M; ciò risolve completamente la questione.

Dato m_M possiamo ora costruire l'estensione centrale di G^* ad esso associata, che chiamiamo G^*_M: si tratterà dell'insieme delle coppie (g^*, z) con prodotto

$$(g_1^*, z_1)(g_2^*, z_2) = (g_1^* g_2^*, m_M(g_1^*, g_2^*) z_1 z_2) \tag{5}$$

Il generico elemento del gruppo G^*_M sarà completamente specificato da una quintupla $(h, b, \vec{v}, \vec{a}, z)$ con $h \in SU(2)$, $b \in \mathbb{R}$, $\vec{v}, \vec{a} \in \mathbb{R}^3$ e $z \in \mathbb{U}$.

Notiamo che se $\vec{v} = \vec{0}$ si ha $m_M(g_1^*, g_2^*) = 1$ e quindi

$$(I, b, \vec{0}, \vec{a}, z)(I, b', \vec{0}, \vec{a}', z') = (I, b + b', \vec{0}, \vec{a} + \vec{a}', zz')$$

Questo dimostra che l'insieme di tutti gli elementi della forma $(I, b, \vec{0}, \vec{a}, z)$ forma un sottogruppo abeliano di G^*_M, che denotiamo con A_M; esso è isomorfo al prodotto diretto $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{U}$.

Notiamo altresì che se $\vec{a}' = \vec{0}$ e $b' = 0$ si ha ugualmente $m_M(g_1^*, g_2^*) = 1$ e quindi

$$(h, 0, \vec{v}, \vec{0}, 1)(h', 0, \vec{v}', \vec{0}, 1) = (hh', 0, \delta(h)\vec{v}' + \vec{v}, \vec{0}, 1)$$

Questo dimostra che l'insieme di tutti gli elementi della forma $(h, 0, \vec{v}, \vec{0}, 1)$ forma un sottogruppo di G^*_M. Dato l'isomorfismo naturale tra questo sottogruppo e $G_0^* = V \times' SU(2)$, continueremo a denotarlo con G_0^*.

Esplicitamente, la legge di composizione in G_M^* si ottiene sostituendo la (4) nella (5), e risulta

$$\begin{aligned}(h,b,\vec{v},\vec{a},z)(h',b',\vec{v}',\vec{a}',z') &= \\ &= \left(hh', b+b', \vec{v}+\delta(h)\vec{v}', \vec{a}+\delta(h)\vec{a}'+b'\vec{v}, zz'e^{iM\left(\frac{1}{2}b'\vec{v}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\delta(h)\vec{a}'\right)}\right) \end{aligned} \tag{6}$$

L'inverso del generico $(h,b,\vec{v},\vec{a},z)$ è

$$(h,b,\vec{v},\vec{a},z)^{-1} = \left(h^{-1}, -b, -\delta(h)^{-1}\vec{v}, -\delta(h)^{-1}(\vec{a}-b\vec{v}), \frac{1}{z}e^{-iM(\frac{1}{2}b\vec{v}\cdot\vec{v}-\vec{v}\cdot\vec{a})}\right)$$

come si verifica facilmente. Si ha poi che

$$(I,b,\vec{0},\vec{a},z)(h,0,\vec{v},\vec{0},1) = (h,b,\vec{v},\vec{a},z)$$

Ciò significa che ogni elemento di G_M^* si scrive univocamente come prodotto di un elemento di A_M e uno di G_0^*. Inoltre

$$\begin{aligned}(h,0,\vec{v},\vec{0},1)(I,b,\vec{0},\vec{a},z)(h,0,\vec{v},\vec{0},1)^{-1} &= \\ &= (h,0,\vec{v},\vec{0},1)(I,b,\vec{0},\vec{a},z)(h^{-1},0,-\delta(h)\vec{v},\vec{0},1) \\ &= \left(h,b,\vec{v},\delta(h)\vec{a}+b\vec{v}, ze^{iM(\frac{1}{2}b\vec{v}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\delta(h)\vec{a})}\right)(h^{-1},0,-\delta(h)\vec{v},\vec{0},1) \\ &= \left(I,b,\vec{0},\delta(h)\vec{a}+b\vec{v}, ze^{iM(\frac{1}{2}b\vec{v}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\delta(h)\vec{a})}\right)\end{aligned} \tag{7}$$

Quest'ultima eguaglianza esibisce esplicitamente l'azione di G_0^* su A_M tramite aggiunzione, e quindi la struttura del prodotto semidiretto $G_M^* = A_M \times' G_0^*$.

Per economia di scrittura, introdurremo nel seguito le notazioni $(h,\vec{v})$ per gli elementi di G_0^* e $(b,\vec{a},z)$ per gli elementi di A_M; denoteremo inoltre l'azione di G_0^* su A_M semplicemente come $(h,\vec{v})[(b,\vec{a},z)]$.

3 Le rappresentazioni proiettive del gruppo di Galileo

Passiamo ora, finalmente, all'analisi delle rappresentazioni del gruppo G_M^*. Il primo passo consiste nello studiare la suddivisione in orbite del gruppo duale $\hat{A}_M$ rispetto all'azione duale di G_0^* e nel determinare per ognuna di queste orbite il *sottogruppo di stabilità* e la misura G_0^*-invariante che rimane definita su di essa.

I caratteri di $A_M \simeq \mathbb{R}^4 \times \mathbb{U}$ si ottengono nella maniera seguente: fissiamo una forma bilineare simmetrica non degenere su $\mathbb{R}^4$, per esempio l'applicazione che a $(\vec{x},t)$ e $(\vec{y},t') \in \mathbb{R}^4$ associa $tt' - x^1y^1 - x^2y^2 - x^3y^3$. Allora tutti e soli i caratteri x di A_M sono dati da

$$x(b,\vec{a},z) = z^n e^{i(p_0 b - \vec{p}\cdot\vec{a})} \tag{8}$$

al variare di $p_0 \in \mathbb{R}$, $\vec{p} \in \mathbb{R}^3$ e $n \in \mathbb{Z}$; ogni elemento di $\hat{A}_M$ è quindi totalmente identificato da una tripla $(p_0,\vec{p},n)$.

L'azione duale di G_0^* su $\hat{A}_M$, che denoteremo con

$$(h,\vec{v})^*[(p_0,\vec{p},n)]$$

si costruisce come da teoria generale: preso $x \in \hat{A}_M$ e $(b,\vec{a},z) \in A_M$, si pone

$$(h,\vec{v})^*[x] : (b,\vec{a},z) \mapsto x((h,\vec{v})^{-1}[(b,\vec{a},z)]) = x((h,\vec{v})^{-1}(b,\vec{a},z)(h,\vec{v}))$$

Notiamo che nel membro di destra l'argomento del carattere x è esattamente la quantità già calcolata (7) in cui si sostituisca h con h^{-1} e $\vec{v}$ con $-\delta(h)^{-1}\vec{v}$; quindi

$$= x((b, \delta(h)^{-1}(\vec{a} - b\vec{v}), ze^{iM(\frac{1}{2}b\vec{v}\cdot\vec{v} - \vec{v}\cdot\vec{a})}))$$

(in questa e nelle successive manipolazioni sfruttiamo più volte il fatto che $\delta(h) \in SO(3)$ può passare da un membro all'altro di un prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$). Ricordando la (8) abbiamo allora che

$$= z^n e^{iMn(\frac{1}{2}b\vec{v}\cdot\vec{v} - \vec{v}\cdot\vec{a})} e^{i(p_0 b - \vec{p}\cdot\delta(h)^{-1}(\vec{a} - b\vec{v}))}$$

ovvero, tramite passaggi immediati:

$$= z^n e^{i(b(p_0 + \frac{1}{2}Mn\vec{v}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\delta(h)\vec{p}) - (Mn\vec{v} + \delta(h)\vec{p})\cdot\vec{a})}$$

L'espressione precedente mostra come l'azione duale di G_0^* su $\hat{A}_M$ sia totalmente descritta dalla formula

$$(h, \vec{v})^*[(p_0, \vec{p}, n)] = \left(p_0 + \frac{1}{2}Mn\vec{v}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\delta(h)\vec{p}, Mn\vec{v} + \delta(h)\vec{p}, n\right) \tag{9}$$

Notiamo che questa azione lascia invariato n. Per descrivere la struttura in orbite di $\hat{A}_M$ conviene distinguere i casi $n = 0$ e $n \neq 0$.

Orbite per $n = 0$

In questo caso la (9) si scrive

$$(h, \vec{v})^*[(p_0, \vec{p}, 0)] = (p_0 + \vec{v}\cdot\delta(h)\vec{p}, \delta(h)\vec{p}, 0) \tag{10}$$

È evidente che tale azione lascia invariato lo scalare $\vec{p}\cdot\vec{p}$. Supponiamo che sia $\vec{p} \neq \vec{0}$; vogliamo dimostrare che per ogni reale $r > 0$ l'insieme

$$O_r^0 = \{(p_0, \vec{p}, 0) \mid \vec{p}\cdot\vec{p} = r^2\}$$

è un'orbita di $\hat{A}_M$. Per farlo occorre mostrare che l'azione duale di G_0^* su O_r^0 è *transitiva*. Scegliamo il punto

$$x_0 = (0, (0, 0, r), 0) \in O_r^0$$

Ricordiamo che G_0^* è a sua volta un prodotto semidiretto, quindi ogni trasformazione omogenea si scrive in modo unico come prodotto di un boost e una rotazione. Dalla (10) vediamo che la generica rotazione $(h, \vec{0})$ manda x_0 in un punto del tipo $(0, \vec{p}, 0)$ con $\vec{p}$ tale che $\vec{p}\cdot\vec{p} = r^2$, e un successivo boost $(I, \vec{v})$ manda il punto $(0, \vec{p}, 0)$ in $(p_0, \vec{p}, 0)$, con $p_0 = \vec{v}\cdot\vec{p}$ che varia sull'intero $\mathbb{R}$ al variare di $\vec{v}$. Quindi l'azione di G_0^* a partire da x_0 copre l'intero O_r^0, come volevasi. Inoltre abbiamo anche dimostrato che

$$O_r^0 = \mathbb{R} \times S_r$$

dove S_r è la sfera di raggio r in $\mathbb{R}^3$.

Poichè l'azione duale su O_r^0 è una traslazione su $\mathbb{R}$ e una rotazione su S_r, è evidente che la misura $\mathrm{d}p_0\,\mathrm{d}\sigma_r$, dove $\mathrm{d}p_0$ è la misura di Lebesgue sui reali e σ_r è la misura invariante normalizzata sulla sfera S_r, è invariante su O_r^0.

Per quel che riguarda infine i sottogruppi di stabilità, occorre risolvere l'equazione

$$(h, \vec{v})^*[(0, (0, 0, r), 0)] = (0, (0, 0, r), 0)$$

ovvero

$$(\vec{v}\cdot\delta(h)(0, 0, r), \delta(h)(0, 0, r), 0) = (0, (0, 0, r), 0)$$

La precedente è un'identità se e solo se $\delta(h)$ è una rotazione nel piano x^1x^2 e $\vec{v}$ appartiene a tale piano. Ricordando che

$$\begin{pmatrix} e^{i\frac{t}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{t}{2}} \end{pmatrix} \overset{\delta}{\mapsto} \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se ne deduce che il sottogruppo di stabilità cercato è

$$\{(h,\vec{v}) \in G_0^* \mid h = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & 0 \end{pmatrix}, z \in \mathbb{U}, v_1, v_2 \in \mathbb{R}\} \tag{11}$$

Nel caso $\vec{p} = \vec{0}$, ogni singolo punto $(p_0, \vec{0}, 0)$ al variare di $p_0 \in \mathbb{R}$ è un'orbita. Evidentemente i sottogruppi di stabilità per queste orbite coincidono tutti con l'intero G_0^*.

Orbite per $n \neq 0$

Supponiamo ora che sia $n \neq 0$. Si verifica facilmente, per calcolo diretto, che la quantità

$$p_0 - \frac{\vec{p} \cdot \vec{p}}{2nM}$$

è invariante per l'azione (9). Per ogni $k \in \mathbb{R}$, definiamo

$$O_k^n = \{(p_0, \vec{p}, n) \mid p_0 - \frac{\vec{p} \cdot \vec{p}}{2nM} = k\}$$

e dimostriamo che si tratta di un'orbita. Come origine scegliamo

$$x_0 = (k, \vec{0}, n) \in O_k^n$$

che viene trasformata dal boost $(I, \frac{1}{nM}\vec{p})$ in

$$\left(I, \frac{1}{nM}\vec{p}\right)^* [(k, \vec{0}, n)] = \left(k + \frac{\vec{p} \cdot \vec{p}}{2nM}, \vec{p}, n\right) \tag{12}$$

Al variare di $\vec{p} \in \mathbb{R}^3$, il punto $(k + \frac{\vec{p} \cdot \vec{p}}{2nM}, \vec{p}, n)$ copre per definizione l'intero insieme O_k^n, che quindi è un'orbita, come volevasi.

Un generico elemento di G_0^* agisce invece su x_0 come

$$(h, \vec{v})^* [(k, \vec{0}, n)] = \left(k + \frac{1}{2} Mn\vec{v} \cdot \vec{v}, Mn\vec{v}, n\right)$$

Da questa relazione si deduce il sottogruppo di stabilità dell'origine scelta impostando la solita equazione $(h, \vec{v})^*[x_0] = x_0$; si ottiene la richiesta $\vec{v} = \vec{0}$ (con h qualunque), per cui il sottogruppo cercato non è altro che $SU(2)$.

È interessante notare che

$$O_k^n = G_0^*/SU(2) = (V \times' SU(2))/SU(2) \simeq V \simeq \mathbb{R}^3$$

Inoltre l'applicazione definita dalla (12)

$$\vec{p} \mapsto \left(k + \frac{\vec{p} \cdot \vec{p}}{2Mn}, \vec{p}, n\right) : \mathbb{R}^3 \longrightarrow O_k^n \tag{13}$$

permette di identificare le componenti di $\vec{p}$ come coordinate globali per i punti di O_k^n. Essendo l'azione duale di G_0^*, come si è visto, essenzialmente l'azione del gruppo euclideo su $\mathbb{R}^3$, è evidente che $\mathrm{d}^3\vec{p}$, la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^3$, è una misura invariante su O_k^n.

Scrittura esplicita delle rappresentazioni di interesse fisico

Ora che abbiamo classificato le varie orbite di $\hat{A}_M$, la teoria generale ci dice che possiamo costruire una rappresentazione unitaria di G_M^* su uno spazio di Hilbert complesso separabile $\mathcal{H}$ semplicemente scegliendo (a) un punto in una delle orbite trovate, e (b) una rappresentazione (unitaria, finito-dimensionale) del sottogruppo di stabilità associato a quest'orbita. Vediamo più in dettaglio in che modo si realizza questa corrispondenza, e quali tra queste rappresentazioni hanno interesse fisico.

Consideriamo dapprima il caso $n = 0$; allora l'estensione centrale di G_M^* sparisce completamente di scena, ciò significa che le rappresentazioni di G^* che si ottengono partendo da queste orbite sono quelle associate ad un moltiplicatore *banale* ($M = 0$), cioè le rappresentazioni ordinarie (non proiettive) di G^*. Dato lo scarso (o nullo) significato fisico di queste rappresentazioni le discuteremo a parte, per completezza, in un'appendice.

Passiamo quindi alle orbite O_k^n con $n \neq 0$; per ognuna di esse il sottogruppo di stabilità è, come si è visto, $SU(2)$. Denotiamo con L una rappresentazione unitaria di $SU(2)$, non necessariamente irriducibile, che agisca su uno spazio lineare finito-dimensionale K; allora la generica rappresentazione T di G_M^* si scrive

$$T_{(h,b,\vec{v},\vec{a},z)} = U_{(I,b,\vec{0},\vec{a},z)} V_{(h,0,\vec{v},\vec{0},1)}$$

dove U è, fissato $(p_0, \vec{p}, n) \in O_k^n$, la rappresentazione di A_m definita dai caratteri (8), ovvero (indicando con I l'operatore identità su $\mathcal{H}$):

$$U_{(I,b,\vec{0},\vec{a},z)} = z^n e^{i(bp_0 - \vec{p}\cdot\vec{a})} I \tag{14}$$

mentre V è la rappresentazione di G_0^* *indotta* da L su $\mathcal{H}$.

Ricordiamo ora che le rappresentazioni ordinarie dell'estensione centrale G_M^* che individuano rappresentazioni proiettive di G^* sono tutte e sole quelle determinate dalla condizione (3), cioè quelle per cui l'elemento $(I, 0, \vec{0}, \vec{0}, z)$ è mappato in zI. Notiamo che qualunque sia la rappresentazione V sarà necessariamente $V_{(I,0,\vec{0},\vec{0},1)} = I$, e quindi

$$T_{(I,0,\vec{0},\vec{0},z)} = U_{(I,0,\vec{0},\vec{0},z)} I = z^n I$$

Se ne conclude che le rappresentazioni proiettive di G^* con moltiplicatore m_M sono **tutte e sole** le rappresentazioni ordinarie di G_M^* associate alle orbite con $n = 1$:

$$O_k^1 = \{(p_0, \vec{p}, 1) \mid p_0 - \frac{\vec{p}\cdot\vec{p}}{2M} = k\}$$

Tali orbite sono coordinatizzate dal vettore $\vec{p}$ mediante la corrispondenza (13), che nel nostro caso si scrive

$$\vec{p} \mapsto \left(k + \frac{\vec{p}\cdot\vec{p}}{2M}, \vec{p}, 1\right)$$

A questo punto resta solo da scrivere esplicitamente la rappresentazione indotta V; ma questo è facile, per via della particolare struttura del gruppo omogeneo G_0^*. Infatti la generica rappresentazione unitaria finito-dimensionale L di $SU(2)$ può essere sollevata a una rappresentazione dell'intero G_0^* (che, con un leggero abuso di notazione, continuiamo a chiamare L) semplicemente facendo agire la parte abeliana del prodotto semidiretto, cioè il sottogruppo dei boost $V \simeq \mathbb{R}^3$, in maniera banale:

$$(h, \vec{v}).k = L(h)k \quad \forall k \in K$$

V risulta allora definita dalla seguente uguaglianza (che proviene dalla teoria generale dei fibrati vettoriali):

$$(V_{(h,0,\vec{v},\vec{0},1)} f)(x) = (h, \vec{v}).f((h, \vec{v})^{-1}[x]) \tag{15}$$

dove $f \in \mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3 \to K;\, \mathrm{d}^3\vec{p})$ e $x \in O^1_k$. Occorre quindi calcolare in che modo l'inverso della generica trasformazione omogenea

$$(h, \vec{v})^{-1} = (h^{-1}, -\delta(h)^{-1}\vec{v})$$

agisce sul generico punto di O^1_k; si ha:

$$\begin{aligned}
&(h^{-1}, -\delta(h)^{-1}\vec{v})^*[(k + \frac{\vec{p}\cdot\vec{p}}{2M}, \vec{p}, 1)] = \\
&\quad = \left(k + \frac{\vec{p}\cdot\vec{p}}{2M} + \frac{1}{2}M\vec{v}\cdot\vec{v} - \delta(h)^{-1}\vec{v}\cdot\delta(h^{-1})\vec{p}, -M\delta(h)^{-1}\vec{v} + \delta(h^{-1})\vec{p}, 1\right)
\end{aligned}$$

ovvero, con raccoglimenti immediati:

$$= \left(k + \frac{1}{2M}(\delta(h)^{-1}(\vec{p} - M\vec{v}))\cdot(\delta(h)^{-1}(\vec{p} - M\vec{v})), \delta(h)^{-1}(\vec{p} - M\vec{v}), 1\right)$$

Questo è proprio il punto di O^1_k coordinatizzato dal vettore $\delta(h)^{-1}(\vec{p} - M\vec{v})$. Dunque in definitiva la (15) diventa:

$$(V_{(h,0,\vec{v},\vec{0},1)}f)(\vec{p}) = L(h)f(\delta(h)^{-1}(\vec{p} - M\vec{v}))$$

con $f \in \mathcal{H}$, mentre la rappresentazione U è descritta dalla (14) che ora si scrive

$$(U_{(I,b,\vec{0},\vec{a},z)}f)(\vec{p}) = ze^{i(bk + \frac{b}{2M}\vec{p}\cdot\vec{p} - \vec{p}\cdot\vec{a})}I$$

Mettendo assieme entrambi i risultati abbiamo che le rappresentazioni di G^*_M associate alle orbite O^1_k sono date da

$$(T^{k,L}_{(h,b,\vec{v},\vec{a},z)}f)(\vec{p}) = ze^{i(bk + \frac{b}{2M}\vec{p}\cdot\vec{p} - \vec{p}\cdot\vec{a})}L(h)f(\delta(h)^{-1}(\vec{p} - M\vec{v}))$$

Le rappresentazioni proiettive di G^* con moltiplicatore m_M si ottengono dall'espressione precedente ponendo $z = 1$. Denotando con $U^{k,L}$ queste rappresentazioni, si ottiene

$$(U^{k,L}_{(h,b,\vec{v},\vec{a})}f)(\vec{p}) = e^{i(bk + \frac{b}{2M}\vec{p}\cdot\vec{p} - \vec{p}\cdot\vec{a})}L(h)f(\delta(h)^{-1}(\vec{p} - M\vec{v}))$$

Per differenti valori di k queste rappresentazioni sono *inequivalenti* se viste come rappresentazioni ordinarie di G^*_M, ma *equivalenti* se viste come rappresentazioni proiettive di G^*; quindi in definitiva

$$(U^{L}_{(h,b,\vec{v},\vec{a})}f)(\vec{p}) = e^{i(\frac{b}{2M}\vec{p}\cdot\vec{p} - \vec{p}\cdot\vec{a})}L(h)f(\delta(h)^{-1}(\vec{p} - M\vec{v}))$$

Queste rappresentazioni hanno la proprietà

$$U^L_{(h,b,\vec{v},\vec{a})}U^L_{(h',b',\vec{v}',\vec{a}')} = m_M(g, g')U^L_{(h,b,\vec{v},\vec{a})(h',b',\vec{v}',\vec{a}')}$$

come si verifica facilmente.

In particolare le rappresentazioni proiettive *irriducibili* di G^* si ottengono quando L stessa è irriducibile. Com'è noto, le rappresentazioni irriducibili di $SU(2)$ sono etichettate da un indice j che assume valori interi e semidispari, e la rappresentazione D^j agisce su $\mathbb{C}^{2j+1}$. Quindi la generica rappresentazione unitaria proiettiva irriducibile di G^* è

$$(U^{j}_{(h,b,\vec{v},\vec{a})}f)(\vec{p}) = e^{i(\frac{b}{2M}\vec{p}\cdot\vec{p} - \vec{p}\cdot\vec{a})}D^j(h)f(\delta(h)^{-1}(\vec{p} - M\vec{v})) \tag{16}$$

con $f \in \mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}^{2j+1};\, \mathrm{d}^3\vec{p})$.

La rappresentazione (16) non ha una forma molto familiare perchè descrive l'azione del gruppo di Galileo nello spazio degli impulsi, mentre in meccanica quantistica non relativistica è più usuale lavorare nello spazio delle coordinate. Possiamo ricavare l'espressione esplicita di $U^j_{(h,b,\vec{v},\vec{a})}$ sulle funzioni delle coordinate usando la trasformata di Fourier-Plancherel $\mathcal{F}$:

$$f \mapsto \hat{f} : L^2(\mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}^{2j+1}; \mathrm{d}^3\vec{p}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}^{2j+1}; \mathrm{d}^3\vec{x})$$

Ricordiamo che $\mathcal{F}$ si definisce come l'unico isomorfismo unitario tra gli spazi dati tale che, per ogni $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^3)$, risulti

$$\int \hat{f}(\vec{x})\varphi(\vec{x})\,\mathrm{d}^3\vec{x} = \int f(\vec{x}) \left(\int \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \varphi(\vec{p})\,\mathrm{d}^3\vec{p} \right) \mathrm{d}^3\vec{x}$$

Definiamo dunque

$$\hat{U}^j = \mathcal{F} U^j \mathcal{F}^{-1}$$

Consideriamo anzitutto il caso in cui U^j è ristretta al sottogruppo abeliano ad un parametro di G^* formato dalle *traslazioni temporali*, cioè da tutti e soli gli elementi della forma $(I, b, \vec{0}, \vec{0})$. La (16) diventa allora

$$(U^j_{(I,b,\vec{0},\vec{0})} f)(\vec{p}) = e^{i\frac{b}{2M}\vec{p}\cdot\vec{p}} f(\vec{p})$$

Con calcoli standard si ha:

$$(\hat{U}^j_{(I,b,\vec{0},\vec{0})} \hat{f})(\vec{x}) = (\mathcal{F} U^j_{(I,b,\vec{0},\vec{0})} \mathcal{F}^{-1} \hat{f})(\vec{x}) = e^{-i\frac{b}{2M}\nabla^2} \hat{f}(\vec{x}) \tag{17}$$

Consideriamo ora ciò che rimane di G^*, cioè gli elementi del tipo $(h, 0, \vec{v}, \vec{a})$. Dalla (16) si ha che

$$(U^j_{(h,0,\vec{v},\vec{a})} f)(\vec{p}) = e^{-i\vec{p}\cdot\vec{a}} D^j(h) f(\delta(h)^{-1}(\vec{p} - M\vec{v}))$$

e quindi

$$(\hat{U}^j_{(h,0,\vec{v},\vec{a})} \hat{f})(\vec{x}) = (\mathcal{F} U^j_{(h,0,\vec{v},\vec{a})} \mathcal{F}^{-1} \hat{f})(\vec{x}) = e^{iM\vec{v}\cdot(\vec{x}-\vec{a})} D^j(h) \hat{f}(\delta(h)^{-1}(\vec{x} - \vec{a})) \tag{18}$$

Mettendo assieme (17) e (18) si ottiene il risultato completo:

$$(\hat{U}^j_{(h,b,\vec{v},\vec{a})} \hat{f})(\vec{x}) = e^{-i\frac{b}{2M}\nabla^2 + iM\vec{v}\cdot(\vec{x}-\vec{a})} D^j(h) \hat{f}(\delta(h)^{-1}(\vec{x} - \vec{a})) \tag{19}$$

È evidente come le traslazioni temporali siano trattate in maniera dissimmetrica rispetto a tutte le altre possibili trasformazioni di Galileo; questo fatto non è dovuto a nostre scelte, ma al diverso ruolo fisico che spazio e tempo ricoprono nella relatività galileiana. È comunque possibile scrivere le trasformazioni di Galileo nello spazio delle configurazioni trattando in maniera simmetrica spazio e tempo, come vedremo tra un attimo.

Rispetto al (gruppo di ricoprimento del) gruppo euclideo, i vettori dello spazio $L^2(\mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}^{2j+1}; \mathrm{d}^3\vec{x})$ in cui agisce $\hat{U}^j$ si trasformano come

$$(\hat{U}^j_{(h,0,\vec{0},\vec{a})} \hat{f})(\vec{x}) = D^j(h) \hat{f}(\delta(h)^{-1}(\vec{x} - \vec{a}))$$

Confrontando questa espressione con le rappresentazioni irriducibili del gruppo euclideo su $\mathbb{R}^3$ si deduce immediatamente che il sistema fisico che corrisponde alla rappresentazione irriducibile $\hat{U}^j$ è localizzabile e la misura a valori proiettivi che porta all'operatore di posizione è l'usuale

$$P(E) : \hat{f} \mapsto \chi_E \hat{f}$$

Quindi lo spazio di Hilbert in cui agisce U^j è lo spazio degli stati di una particella di massa M e spin j. Notiamo infine dalla (19) la natura non banale delle trasformazioni degli stati rispetto ai boost galileiani, che si rispecchia nella presenza del fattore di fase $e^{iM\vec{v}\cdot\vec{x}}$.

Per ottenere una rappresentazione di G^* sulle funzioni di $\vec{x}$ e t si può procedere come segue: si definisca formalmente lo spazio delle funzioni $\psi(\vec{x},t)$:

$$\psi(\vec{x},t) = \int e^{-i(\frac{\vec{p}\cdot\vec{p}}{2M}t - \vec{p}\cdot\vec{x})} f(\vec{p})\, \mathrm{d}^3\vec{p}$$

dove $f \in L^2(\mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}^{2j+1}; \mathrm{d}^3\vec{p})$. Allora con calcoli standard si ottiene

$$(V_{(h,b,\vec{v},\vec{a})}\psi)(\vec{x},t) = e^{-iM(\frac{1}{2}(t-b)\vec{v}\cdot\vec{v} - \vec{v}\cdot(\vec{x}-\vec{a}))} D^j(h)\psi(\delta(h)^{-1}(\vec{x} - \vec{v}(t-b) - \vec{a}), t-b)$$

Appendice: le rappresentazioni con $n = 0$

In questa appendice discutiamo le rappresentazioni di G^*_M associate alle orbite di $\hat{A}_M$ per cui $n = 0$, ovvero le rappresentazioni ordinarie di G^*. Consideriamo anzitutto le orbite del tipo $\{(p_0, \vec{0}, 0)\}$ al variare di $p_0 \in \mathbb{R}$; poichè per queste orbite il sottogruppo di stabilità è l'intero gruppo di Galileo disomogeneo G^*_0, le rappresentazioni unitarie irriducibili ad esse associate sono date da

$$T_{(h,b,\vec{v},\vec{a})} = e^{ibp_0}\pi(h, 0, \vec{v}, \vec{0})$$

dove π è una qualunque rappresentazione unitaria e irriducibile di G^*_0. Queste rappresentazioni non hanno significato fisico: infatti le traslazioni temporali agiscono come la moltiplicazione per un numero complesso di modulo 1 costante su tutto lo spazio di Hilbert in cui agisce la rappresentazione. Allora queste trasformazioni non cambiano gli stati dei sistemi quantistici e quindi non descrivono alcuna dinamica.

Consideriamo ora le orbite O^0_r. Il sottogruppo di stabilità è dato dalla (11); indichiamolo per brevità con $\tilde{G}$. Se $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$, definiamo $\xi(\vec{v}) = v_1 - iv_2$; allora il prodotto

$$(h, \vec{v}_1)(h, \vec{v}_2) = (h, \vec{v})$$

tra due elementi di $\tilde{G}$ è dato da

$$h = \begin{pmatrix} z_1 z_2 & 0 \\ 0 & (z_1 z_2)^{-1} \end{pmatrix}, \quad \xi(\vec{v}) = z^2\xi(\vec{v}_2) + \xi(\vec{v}_1)$$

Allora l'applicazione

$$(h, \vec{v}) \mapsto (z, \xi(\vec{v})) : \tilde{G} \longrightarrow \mathbb{C} \times' \mathbb{U}$$

è un isomorfismo di gruppi in cui il prodotto semidiretto $\mathbb{C} \times' \mathbb{U}$ è definito rispetto al prodotto

$$(\xi_1, z_1)(\xi_2, z_2) = (z_1^2\xi_2 + \xi_1, z_1 z_2)$$

Dunque $\tilde{G} \simeq \mathbb{C} \times' \mathbb{U}$. Occorre scrivere le rappresentazioni unitarie irriducibili di $\mathbb{C} \times' \mathbb{U}$; poichè esso è a sua volta un prodotto semidiretto, occorre determinare i caratteri di $\mathbb{C}$ (considerato come gruppo additivo), l'azione duale di $\mathbb{U}$ su $\hat{\mathbb{C}}$, le sue orbite e i sottogruppi di stabilità.

Per ogni numero complesso w

$$x_w(\xi) = e^{i\Re(w\xi^*)}$$

è un carattere di $\mathbb{C}$, e $w \mapsto x_w$ è un isomorfismo del gruppo additivo dei complessi su tutto $\hat{\mathbb{C}}$. L'azione duale è data da

$$z^*(w) = z^2 w$$

e le orbite in $\hat{\mathbb{C}}$ sono

$$\{w = 0\}, \quad \{w \mid |w| = \rho\}$$

per $\rho > 0$. Le rappresentazioni di $\tilde{G}$ individuate dalla prima orbita sono semplicemente quelle di $\mathbb{U}$ "sollevate", quindi per ogni $n \in \mathbb{Z}$

$$\pi_n(z, \xi) = z^n$$

è una rappresentazione unitaria irriducibile di $\tilde{G}$. Quanto alle altre orbite, notiamo che il sottogruppo di stabilità è il gruppo di due elementi

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} \simeq \mathbb{Z}_2$$

Questo gruppo ha due rappresentazioni unitarie inequivalenti, quella banale e quella che manda i due elementi in $\pm I$; vi sono dunque due rappresentazioni irriducibili inequivalenti, che denotiamo π_ρ e π'_ρ. Esse generano due rappresentazioni di $\tilde{G}$ a valori in $L^2(\mathbb{U}; \mathrm{d}t)$, che sono

$$(\pi_\rho(z, \xi) f)(t) = e^{i\rho \Re(t z^{-1} \xi^*)} f(z^{-2} t)$$
$$(\pi'_\rho(z, \xi) f)(t) = e^{i\rho \Re(t z^{-1} \xi^*)} z f(z^{-2} t)$$

In corrispondenza a tutte queste famiglie di rappresentazioni (π_n, π_ρ e π'_ρ) vi sono altrettante rappresentazioni unitarie di G^*, etichettate anche dall'ulteriore indice r che descrive l'orbita. Queste si possono scrivere esplicitamente, ma per quanto ci interessa è sufficiente notare che, qualunque sia la rappresentazione scelta, la sua azione sul sottogruppo delle traslazioni spazio-temporali è

$$(U_{(I,b,\vec{0},\vec{a})} f)(p_0, \vec{p}) = e^{i(bp_0 - \vec{p}\cdot\vec{a})} f(p_0, \vec{p}) \tag{20}$$

I sistemi fisici che corrispondono a rappresentazioni di questo tipo non sono localizzabili, cioè non ammettono un operatore posizione. Infatti, sia V la restrizione di una rappresentazione siffatta al sottogruppo delle traslazioni spaziali e supponiamo che esista una misura a valori proiettivi $P(E)$ su $\mathbb{R}^3$, a valori su $\mathcal{H}$ (spazio di Hilbert di arrivo di V) tale che

$$V_{\vec{a}} P(E) V_{\vec{a}}^{-1} = P(E + \vec{a})$$

per ogni $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ e $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^3)$. Allora esiste un isomorfismo W di $\mathcal{H}$ su $L^2(\mathbb{R}^3 \to \mathcal{K}; \mathrm{d}^3\vec{x})$ tale che

$$(W V_{\vec{a}} W^{-1} f)(\vec{x}) = f(\vec{x} - \vec{a})$$

per ogni $f \in L^2$. Poichè $\vec{a} \mapsto V_{\vec{a}}$ è una rappresentazione di un gruppo abeliano, esiste unica la misura a valori proiettivi Q su $\mathcal{B}(\mathbb{R}^3)$ tale che

$$V_{\vec{a}} = \int e^{i(\vec{q}\cdot\vec{a})} \, \mathrm{d}Q(\vec{q})$$

La relazione (20) e l'unicità di Q ci assicurano che Q si annulla sul complemento dell'insieme $\{\vec{q} \mid \vec{q}\cdot\vec{q} = r^2\}$; infatti nello spazio di Hilbert $L^2(O^o_r \to \mathcal{K}; \mathrm{d}\sigma \, \mathrm{d}p_0)$ (dove $\mathcal{K}$ è lo spazio di Hilbert in cui agisce la rappresentazione unitaria di $\tilde{G}$) $V_{\vec{a}}$ agisce come l'operatore di moltiplicazione per la funzione $e^{-i\vec{p}\cdot\vec{a}}$, quindi $Q(E)$ è l'operatore di moltiplicazione per χ_E e quindi si annulla sul complemento dell'insieme $\vec{p}\cdot\vec{p} = r^2$. Allora anche WQW^{-1} si annulla sullo stesso insieme.

D'altra parte, usando la trasformata di Fourier-Plancherel si ha

$$(\mathcal{F} W V_{\vec{a}} W^{-1} \mathcal{F}^{-1} \hat{f})(\vec{p}) = e^{i(\vec{p}\cdot\vec{a})} \hat{f}(\vec{p})$$

Questo dimostra che la classe di misure di WQW^{-1} è quella di Lebesgue. Ma ciò è assurdo, perchè l'insieme dei $\vec{p}$ tali che $\vec{p}\cdot\vec{p} = r^2$ ha misura di Lebesgue nulla. Se ne conclude che l'ipotesi di partenza, cioè l'esistenza della misura $P(E)$, è falsa e quindi il sistema in esame non è localizzabile.