Grassmanniane e gerarchia KP

Alberto Tacchella

Sommario

Questi sono degli appunti che ho scritto negli anni 2007–2010 mentre studiavo il lavoro di Segal e Wilson [SW85] sulla geometria dello spazio delle soluzioni della gerarchia KP, nonché alcuni lavori successivi di Wilson [Wil93, Wil98], Kasman [Kas95] e altri; non sono più stati rivisti da allora. Li pubblico nella speranza che siano utili a qualcuno, ma possono contenere parti incomplete e/o errori.

Indice

0 Preliminari

§1. Operatori su spazi di Hilbert. In ciò che segue lavoreremo su uno spazio di Hilbert complesso separabile H; dati due suoi elementi $v, w \in H$ il loro prodotto scalare sarà denotato $\langle v, w\rangle$ e la corrispondente norma come $\|v\| := \sqrt{\langle v, v\rangle}$. L'aggiunto di un operatore lineare T sarà denotato T^*. Se W è un sottospazio lineare chiuso di H il suo complemento ortogonale sarà denotato $W^\perp$. L'operatore di proiezione ortogonale su un sottospazio W sarà denotato $\pi_W \colon H \to W$.

Un operatore lineare $T \colon H \to H'$ tra due spazi di Hilbert si dice **limitato** se esiste un numero reale $M > 0$ tale che

$$\|T(v)\|_H \leq M\|v\|_{H'} \qquad \text{per ogni } v \in H. \tag{1}$$

Equivalentemente, T manda sottoinsiemi limitati di H in sottoinsiemi limitati di H'. Un operatore lineare è limitato se e solo se è continuo. Nel seguito il termine "operatore" sarà da intendersi, salvo esplicito avviso contrario, come sinonimo di "operatore lineare limitato".

Lo spazio lineare formato da tutti gli operatori da H in H' sarà denotato $\mathcal{L}(H; H')$; quando $H = H'$ scriveremo semplicemente $\mathcal{L}(H)$. Su tale spazio si può definire una norma assegnando a ciascun $T \in \mathcal{L}(H; H')$ il più piccolo $M \in \mathbb{R}^+$ che rende valida la (1); essa viene detta la **norma operatoriale** e sarà denotata $\|T\|$. Equipaggiato con questa norma, $\mathcal{L}(H; H')$ è una C^*-algebra.

Un operatore $T \in \mathcal{L}(H)$ si dice **invertibile** se esiste $T^{-1} \in \mathcal{L}(H)$ tale che $TT^{-1} = T^{-1}T = 1$, dove 1 è l'operatore identità su H. L'insieme degli operatori invertibili forma un gruppo rispetto alla composizione; esso si denota $\mathrm{GL}(H)$ e viene detto il **gruppo generale lineare** su H.

Un operatore $U \in \mathrm{GL}(H)$ si dice **unitario** se $U^{-1} = U^*$, o equivalentemente se è un'isometria la cui immagine è densa in H. L'insieme degli operatori unitari individua un sottogruppo chiuso di $\mathrm{GL}(H)$ denotato $\mathrm{U}(H)$ e detto il **gruppo unitario** su H.

Un operatore $T \in \mathcal{L}(H; H')$ si dice **di rango finito** se la sua immagine è un sottospazio lineare finito-dimensionale di H'. In tal caso esistono basi ortonormali ("adattate") $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ per H e $(e'_i)_{i\in\mathbb{N}}$ per H' tali che per ogni $v \in H$ risulta

$$T(v) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle e_i, v\rangle e'_i \tag{2}$$

con $n = \dim \operatorname{im} T$ e $\alpha_i \neq 0$ per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$. L'insieme degli operatori di rango finito su H sarà denotato $\mathcal{L}_{\mathrm{fin}}(H)$; esso coincide con il più piccolo $*$-ideale bilatero di $\mathcal{L}(H)$.

Un operatore $T \in \mathcal{L}(H; H')$ si dice **compatto** se l'immagine della palla unitaria in H è un sottoinsieme compatto di H'. Equivalentemente, un operatore è compatto se e solo se esso è il limite (nella topologia indotta dalla norma operatoriale) di operatori di rango finito. Ne segue che anche per operatori compatti sussiste un'espressione canonica analoga alla (2) in cui però la somma corre su $\mathbb{N}$, la successione $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge a zero e l'uguaglianza va intesa nel senso della convergenza nella norma operatoriale:

$$T(v) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_i \langle e_i, v\rangle e'_i. \tag{3}$$

L'insieme degli operatori compatti su H sarà denotato $\mathcal{K}(H)$ ed è il più piccolo $*$-ideale bilatero di $\mathcal{L}(H)$ che sia chiuso nella topologia indotta dalla norma operatoriale (e anzi, nell'ipotesi che H sia separabile si tratta dell'*unico* ideale siffatto). Ne segue la possibilità di considerare il quoziente $\mathcal{L}(H)/\mathcal{K}(H)$ che è a sua volta una C^*-algebra, detta l'**algebra di Calkin** di H.

Un operatore compatto $T \in \mathcal{K}(H; H')$ si dice **di classe traccia** se, una volta posto nella forma canonica (3), la serie $\sum_i |\alpha_i|$ risulta convergente. Ne segue (quando $H = H'$) la possibilità di definire la **traccia** di T come

$$\operatorname{Tr} T := \sum_{i\in\mathbb{N}} \langle T(e_i), e_i\rangle,$$

dove $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ è una base ortonormale per H; in virtù delle ipotesi fatte tale serie converge e il suo valore non dipende dalla base ortonormale scelta.

L'insieme degli operatori di classe traccia su H sarà denotato $\mathcal{C}_1(H)$ ed è uno $*$-ideale bilatero di $\mathcal{L}(H)$; la traccia sopra definita è un funzionale lineare su tale spazio e soddisfa le due ulteriori proprietà $\operatorname{Tr} ST = \operatorname{Tr} TS$ (ciclicità) e $\operatorname{Tr} T^*T \geq 0$ (positività). Possiamo allora definire una norma

$$\|T\|_1 := \sum_{i\in\mathbb{N}} |\alpha_i|$$

detta la **norma della traccia** su $\mathcal{C}_1(H)$.

Un operatore compatto $T \in \mathcal{K}(H; H')$ si dice **di Hilbert-Schmidt** se, una volta posto nella forma canonica (3), la serie $\sum_i |\alpha_i|^2$ risulta convergente. Ne segue (quando $H = H'$) che la serie

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \|T(e_i)\|^2$$

converge per ogni base ortonormale $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ di H. Evidentemente ogni operatore di classe traccia è un operatore di Hilbert-Schmidt ma non viceversa. Il prodotto di due operatori di Hilbert-Schmidt è di classe traccia.

L'insieme degli operatori di Hilbert-Schmidt su H sarà denotato $\mathcal{C}_2(H)$ ed è uno $*$-ideale bilatero di $\mathcal{L}(H)$. Il funzionale bilineare definito su di esso dalla posizione

$$\langle S, T\rangle := \operatorname{Tr}(S^*T) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \langle S(e_i), T(e_i)\rangle$$

è un prodotto scalare che rende $\mathcal{C}_2(H)$ uno spazio di Hilbert; la corrispondente norma

$$\|T\|_2 := \sqrt{\operatorname{Tr}(T^*T)} = \sqrt{\sum_{i\in I} \|T(e_i)\|^2}$$

si dice la **norma di Hilbert-Schmidt** su $\mathcal{C}_2(H)$.

Notiamo che tra le classi di operatori introdotte in precedenza sussiste la seguente catena di inclusioni (che, nell'ipotesi di H infinito-dimensionale, sono tutte proprie):

$$\mathcal{L}(H) \supset \mathcal{K}(H) \supset \mathcal{C}_2(H) \supset \mathcal{C}_1(H) \supset \mathcal{L}_{\text{fin}}(H).$$

Inoltre $\mathcal{L}_{\text{fin}}(H)$ è denso in ciascuno degli spazi $\mathcal{C}_1(H)$, $\mathcal{C}_2(H)$ e $\mathcal{K}(H)$ nelle loro rispettive topologie.

Un operatore $T \in \mathcal{L}(H)$ si dice **di Fredholm** se è invertibile modulo operatori compatti, ovvero se esiste $S \in \mathcal{L}(H)$ tale che $1 - ST$ e $1 - TS$ sono compatti. Equivalentemente, detta π la proiezione canonica di $\mathcal{L}(H)$ su $\mathcal{L}(H)/\mathcal{K}(H)$, si ha che T è un operatore di Fredholm se e solo se $\pi(T)$ è invertibile nell'algebra di Calkin. Più concretamente, un operatore $T \in \mathcal{L}(H)$ è di Fredholm se e solo se ha immagine chiusa e ha nucleo e conucleo finito-dimensionali. (Si noti per inciso che $\dim \operatorname{coker} T = \operatorname{codim} \operatorname{im} T = \dim \ker T^*$.)

L'insieme degli operatori di Fredholm su H si denota $\mathcal{F}(H)$ e, in virtù di quanto appena visto, coincide con (la controimmagine secondo π de) il gruppo delle unità dell'algebra di Calkin. Quest'ultimo è un aperto di $\mathcal{L}(H)/\mathcal{K}(H)$, quindi $\mathcal{F}$ è aperto in $\mathcal{L}(H)$; inoltre è chiuso per prodotti (perchè π è un omomorfismo) ed è chiuso sotto aggiunzione, cioè se T è di Fredholm allora anche T^* è di Fredholm. Infine, siano dati $T \in \mathcal{F}(H)$ e $K \in \mathcal{K}(H)$; allora $\pi(T + K) = \pi(T)$ e quindi $T + K$ è a sua volta un operatore di Fredholm.

Dato $T \in \mathcal{F}(H)$, l'**indice** di T è l'intero

$$i(T) := \dim \ker T - \dim \operatorname{coker} T.$$

L'indice è una funzione continua $\mathcal{F}(H) \to \mathbb{Z}$ ed è un omomorfismo di gruppi tra la struttura moltiplicativa su $\mathcal{F}(H)$ e la struttura additiva su $\mathbb{Z}$, ovvero

$$i(ST) = i(S) + i(T).$$

Per ogni $n \in \mathbb{Z}$ si indica con $\mathcal{F}_n(H)$ la controimmagine di n secondo i, cioè lo spazio degli operatori di Fredholm di indice n. Si dimostra che ciascun $\mathcal{F}_n(H)$ è connesso per archi, quindi lo spazio degli operatori di Fredholm $\mathcal{F}(H)$ si partiziona in una famiglia numerabile di componenti connesse, etichettate da un numero intero. Si noti che ogni operatore invertibile è un operatore di Fredholm di indice zero (in effetti tale che $\dim \ker T = \dim \operatorname{coker} T = 0$), quindi $\mathrm{GL}(H) \subset \mathcal{F}_0(H)$.

Un risultato importante è che l'indice di un operatore di Fredholm è *invariante per perturbazioni compatte*, ovvero

$$i(T + K) = i(T) \qquad \text{per ogni } T \in \mathcal{F}(H),\ K \in \mathcal{K}(H).$$

In altri termini la funzione i passa al quoziente sull'algebra di Calkin.

Un operatore $A \colon H \to H$ si dice **avere determinante** se differisce dall'identità per un operatore di classe traccia, ovvero $A = 1+T$ per qualche $T \in \mathcal{C}_1(H)$. Il **determinante** di un operatore siffatto è definito in base alla seguente formula:

$$\det(1 + \mu T) := \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu^n \operatorname{Tr}(\Lambda^n(T)) \qquad \text{per ogni } \mu \in \mathbb{C},$$

dove $\Lambda^n(T)$ è l'operatore su $\Lambda^n(H)$ che manda $v_1 \wedge \cdots \wedge v_n$ in $T(v_1) \wedge \cdots \wedge T(v_n)$. Un'espressione più esplicita è data dalla **formula di Plemelj**:

$$\det(1 + T) = \mathrm{e}^{-\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n} \operatorname{Tr} T^n}$$

che converge se $\operatorname{Tr} |T|^p < 1$ per qualche p.

Si dimostra che se A è un operatore che ha determinante allora è invertibile se e solo se $\det A \neq 0$. Inoltre se A e B hanno determinante allora AB ha determinante e vale un analogo infinito-dimensionale del teorema di Binet:

$$\det AB = \det A \det B.$$

Il gruppo degli operatori $H \to H$ invertibili e che hanno determinante sarà denotato $\mathcal{T}(H)$; esso è un gruppo topologico con la topologia metrica indotta dalla norma della traccia. L'applicazione $\det\colon \mathcal{T}(H) \to \mathbb{C}^*$ sopra definita si configura come un omomorfismo di gruppi topologici; il suo nucleo (ovvero il sottogruppo degli operatori aventi determinante 1) sarà denotato $\mathcal{T}_1$.

§2. Grassmanniane finito-dimensionali. Ricordiamo brevemente le caratteristiche principali delle grassmanniane relative a spazi lineari di dimensione finita. Il materiale seguente è tratto da [GH78].

Sia V uno spazio lineare complesso di dimensione n. La **grassmanniana dei k-spazi in** V, denotata $\mathrm{Gr}(k, V)$, è l'insieme formato dai sottospazi k-dimensionali di V. Quando $V = \mathbb{C}^n$ useremo la notazione $\mathrm{Gr}(k, n)$.

Dato $W \in \mathrm{Gr}(k, V)$, ad ogni base $(w_1, \ldots, w_k)$ per W si associa il polivettore

$$\omega := w_1 \wedge \cdots \wedge w_k \in \Lambda^k(V).$$

Polivettori associati a basi diverse differiscono solo per un multiplo scalare pari al determinante della matrice di passaggio tra le due basi; ne segue che c'è un'applicazione ben definita

$$\Pi\colon\ \mathrm{Gr}(k, V) \to \mathbb{P}(\Lambda^k(V)).$$

Tale applicazione è iniettiva: infatti dato $p \in \operatorname{im} \Pi$ possiamo caratterizzare $\Pi^{-1}(p)$ come l'unico sottospazio lineare di V formato da tutti e soli i vettori $v \in V$ tali che $v \wedge \omega = 0$ in $\Lambda^{k+1}(V)$. L'applicazione Π si dice l'**embedding di Plücker** di $\mathrm{Gr}(k, V)$ nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^N$ (dove $N := \dim \Lambda^k(V) - 1 = \binom{n}{k} - 1$); la sua immagine può essere caratterizzata esplicitamente come luogo degli zeri di una famiglia di polinomi omogenei (vedi 1). Ne segue che $\mathrm{Gr}(k, V)$ eredita una struttura di varietà algebrica proiettiva.

Le grassmanniane $\mathrm{Gr}(k, V)$ e $\mathrm{Gr}(n-k, V^*)$ sono in corrispondenza biunivoca: infatti l'applicazione

$$(\cdot)^*\colon\ \mathrm{Gr}(k, V) \to \mathrm{Gr}(n - k, V^*)$$

definita da $W \mapsto W^* := \{\, \varphi \in V^* \mid \langle \varphi, w \rangle = 0 \text{ per ogni } w \in W \,\}$ è una bigezione tra i sottospazi k-dimensionali di V e quelli $(n - k)$-dimensionali di V^*. Conseguentemente,

$\mathrm{Gr}(n-k, V^*)$ viene detta la **grassmanniana duale** di $\mathrm{Gr}(k, n)$. In termini dell'embedding di Plücker tale dualità corrisponde all'identificazione naturale che sussiste, a meno di fattori scalari, tra $\Lambda^k(V)$ e $\Lambda^{n-k}(V^*)$ tramite prodotto interno.

Per introdurre su $\mathrm{Gr}(k, n)$ una struttura di varietà complessa liscia iniziamo col definire un particolare atlante di carte locali. Fissata una base $(e_1, \dots, e_n)$ per V abbiamo che un qualunque sottospazio $W \in \mathrm{Gr}(k, n)$ può essere rappresentato da una matrice $k \times n$ di rango massimo, chiamiamola M_W, in base alla richiesta che le righe di M_W formino una base per W. Chiaramente una simile matrice è determinata a meno di moltiplicazione da sinistra per una matrice $k \times k$ invertibile.

Sia $I = (i_1, \dots, i_k)$ un multi-indice di lunghezza k e $V_{\bar{I}}$ il sottospazio di dimensione $n-k$ generato dai vettori $(e_j)_{j \notin I}$. Definiamo

$$U_I := \{ \, W \in \mathrm{Gr}(k, n) \mid W \cap V_{\bar{I}} = \{0\} \, \}$$

In altre parole U_I è l'insieme dei k-spazi W che non intersecano $V_{\bar{I}}$, o equivalentemente tali che il minore di ordine k di M_W le cui colonne sono selezionate dal multi-indice I è non nullo (questo fatto non dipende dalla particolare M_W scelta). In particolare ogni $W \in U_I$ ammette un'unica matrice rappresentativa W^I la cui sottomatrice che si ottiene selezionando le colonne che compaiono nel multi-indice I è la matrice identità $k \times k$. Ad esempio ogni $W \in U_{(1,\dots,k)}$ è rappresentato da una matrice della forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & a_{11} & \dots & a_{1,n-k} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_{21} & \dots & a_{2,n-k} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{k1} & \dots & a_{k,n-k} \end{pmatrix}$$

e viceversa ad ogni matrice di questo tipo si associa uno e un solo elemento di $U_{(1,\dots,k)}$. Se ne conclude che gli elementi della sottomatrice $k \times (n-k)$ di W^I le cui colonne sono determinate dal multi-indice $\bar{I}$ definiscono una bigezione

$$\varphi_I \colon U_I \to \mathbb{C}^{k(n-k)}$$

Ora, $\varphi_I(U_I \cap U_J)$ è un aperto di $\mathbb{C}^{k(n-k)}$ per ogni scelta dei multi-indici I, J; affermiamo che le mappe $\varphi_I \circ \varphi_J^{-1}$ sono olomorfe in questo aperto e quindi danno a $\mathrm{Gr}(k, n)$ una struttura di varietà complessa. Infatti se $W \in U_I \cap U_J$ e detta W^I_J la sottomatrice di ordine k di W^I individuata da J, risulta

$$W^J = (W^I_J)^{-1} \cdot W^I$$

e gli elementi di matrice di $(W^I_J)^{-1}$ sono funzioni olomorfe degli elementi di matrice di W^I.

Con questa costruzione $\mathrm{Gr}(k, n)$ si qualifica come una varietà complessa di dimensione $k(n-k)$ compatta e connessa; per vedere questi ultimi due fatti basta notare che la posizione $g \mapsto g(V_k)$ definisce una mappa $\mathrm{U}(n) \to \mathrm{Gr}(k, n)$ continua e surgettiva (qui $V_k := \mathrm{span}\{e_1, \dots, e_k\} \subseteq \mathbb{C}^n$). Similmente il gruppo lineare $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ agisce transitivamente su $\mathrm{Gr}(k, n)$. Notiamo che $\mathrm{Gr}(1, n)$ si identifica con lo spazio proiettivo $\mathbb{P}^{n-1}$; la "matrice rappresentativa" $(w_1, \ldots, w_n)$ di una retta $W \in \mathrm{Gr}(1, n)$ corisponde alle sue coordinate omogenee in $\mathbb{P}^{n-1}$, mentre

$$W^{(i)} = \left(\frac{w_1}{w_i}, \ldots, 1, \ldots, \frac{w_n}{w_i} \right)$$

e quindi

$$\varphi_{(i)}(W) = \left(\frac{w_1}{w_i}, \ldots, \frac{w_n}{w_i} \right)$$

ovvero, le n carte di $\mathrm{Gr}(1, n)$ definite dalla costruzione precedente si identificano con gli n sistemi di coordinate affini su $\mathbb{P}^{n-1}$ che si ottengono eliminando l'i-esimo iperpiano coordinato.

Sempre a base $(e_1, \ldots, e_n)$ di V fissata, consideriamo la *bandiera completa* associata:

$$V_i := \mathrm{span}\{e_1, \ldots, e_i\}$$

e dato $W \in \mathrm{Gr}(k, n)$ la succession crescente di sottospazi

$$0 = W \cap V_0 \subseteq W \cap V_1 \subseteq \cdots \subseteq W \cap V_{n-1} \subseteq W \cap V_n = W$$

Se W è in posizione generica rispetto ai vettori della base allora le intersezioni $W \cap V_i$ saranno nulle per $i \leq n - k$ e avranno dimensione $i - (n - k)$ da lì in poi; si noti che i sottospazi siffatti sono esattamente gli elementi dell'aperto $U_{(n-k+1,\ldots,n)}$ definito in precedenza.

In generale, dato $W \in \mathrm{Gr}(k, n)$ qualunque e posto $d_i := \dim(W \cap V_i)$ si ha la sequenza crescente di naturali

$$0 = d_0 \leq d_1 \leq \cdots \leq d_{n-1} \leq d_n = k$$

Ora, due elementi successivi di questa sequenza differiscono al più di una unità, quindi essa contiene esattamente k "salti". Definiamo il **simbolo di Schubert** di W come la k-upla di numeri naturali che corrispondono agli indici $i \in \{1, \ldots, n\}$ per i quali si ha un salto (ovvero $d_i = d_{i-1} + 1$); chiaramente si tratta di una sequenza strettamente crescente di naturali compresi tra 1 e n. Data una sequenza $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$ siffatta definiamo la **cella di Schubert** C_σ come l'insieme dei sottospazi $W \in \mathrm{Gr}(k, n)$ che hanno σ come simbolo di Schubert.

Possiamo costruire una base canonica per $W \in C_\sigma$ nella maniera seguente: per definizione di simbolo di Schubert, $W \cap V_{\sigma_1}$ ha dimensione 1; sia v_1 un suo generatore, normalizzato in maniera tale che $\langle v_1, e_{\sigma_1} \rangle = 1$, cioè

$$v_1 = (\underbrace{*, \ldots, *}_{\sigma_1 - 1}, 1, 0, \ldots, 0)$$

Si prenda poi v_2 tale che $\{v_1, v_2\}$ generano $W \cap V_{\sigma_2}$, normalizzato in maniera tale che $\langle v_2, e_{\sigma_1} \rangle = 0$ e $\langle v_2, e_{\sigma_2} \rangle = 1$, cioè

$$v_2 = (\underbrace{*, \ldots, *}_{\sigma_1 - 1}, 0, \underbrace{*, \ldots, *}_{\sigma_2 - \sigma_1 - 1}, 1, 0, \ldots, 0)$$

e così via fino a v_k. Allora il k-spazio W ammette un'unica matrice rappresentativa della seguente forma:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & \cdots & * & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 1 & 0 & \cdots \\ * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \\ * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots \end{pmatrix}$$

e viceversa ogni matrice di questo tipo descrive un k-spazio che appartiene a C_σ. Ora, una matrice siffatta ha un numero di elementi liberi che è dato da

$$d_\sigma := k(\sigma_1 - 1) + (k-1)(\sigma_2 - \sigma_1 - 1) + \cdots = \sum_{i=0}^{k-1} (k-i)(\sigma_{i+1} - \sigma_i - 1)$$

(con la convenzione $\sigma_0 = 0$); abbiamo così stabilito degli omeomorfismi

$$C_\sigma \cong \mathbb{C}^{d_\sigma}$$

da cui si vede che gli insiemi C_σ definiscono una decomposizione in celle di $\mathrm{Gr}(k,n)$. Essa generalizza la celebre decomposizione in celle valida per gli spazi proiettivi,

$$\mathbb{P}^n = \mathbb{C}^n \cup \mathbb{C}^{n-1} \cup \cdots \cup \mathbb{C}^1 \cup \mathbb{C}^0$$

cui si riduce nel caso $k = 1$.

Dato un simbolo di Schubert σ, la **partizione associata a** σ è definita da

$$\lambda(\sigma) := (\sigma_k - k, \ldots, \sigma_1 - 1)$$

Si tratta evidentemente di una partizione di lunghezza non maggiore di k le cui parti non sono maggiori di $n - k$, e la corrispondenza tra simboli di Schubert e questa classe di partizioni è bigettiva. Affermiamo che d_σ è pari al *peso* della partizione associata a σ; infatti risulta

$$\sum_{i=0}^{k-1} (k-i)(\sigma_{i+1} - \sigma_i - 1) = \sum_{i=0}^{k-1} k(\sigma_{i+1} - \sigma_i - 1) - \sum_{i=0}^{k-1} i(\sigma_{i+1} - \sigma_i - 1)$$

La prima somma è di tipo telescopico e vale $k\sigma_k - k^2$; la seconda è simile tranne che per la presenza dell'indice a fattore, che fà sì che resti una occorrenza di ciascun σ_i tranne che per $i = k$ (nel qual caso si ha un addendo $(k-1)\sigma_k$) più la somma di tutti gli interi compresi tra 0 e $k - 1$. In definitiva risulta

$$d_\sigma = k\sigma_k - k^2 + (\sigma_1 + \cdots + \sigma_{k-1}) + (k-1)\sigma_k + \frac{k(k-1)}{2} = (\sigma_1 + \cdots + \sigma_k) - \frac{k(k+1)}{2}$$

ed è immediato verificare che questa coincide proprio con la somma delle parti di $\lambda(\sigma)$.

A titolo di esempio consideriamo la struttura in celle della prima grassmanniana non banale (cioè che non coincide con uno spazio proiettivo), $\mathrm{Gr}(2,4)$; essa è anche nota come la *quadrica di Klein* perchè il suo embedding di Plücker $\Pi\colon \mathrm{Gr}(2,4) \to \mathbb{P}^5$ è definito dall'unica equazione $\omega \wedge \omega = 0$, che è quadratica nelle coordinate omogenee. I possibili simboli di Schubert per un elemento di $\mathrm{Gr}(2,4)$ sono elencati nella seguente tabella:

d_0	d_1	d_2	d_3	d_4	σ	$\lambda(\sigma)$	$\dim C_\sigma$
0	0	0	1	2	(34)	(22)	4
0	0	1	1	2	(24)	(21)	3
0	0	1	2	2	(23)	(11)	2
0	1	1	1	2	(14)	(2)	2
0	1	1	2	2	(13)	(1)	1
0	1	2	2	2	(12)	()	0

La cella $C_{(34)}$ corrisponde all'aperto affine $U_{\{3,4\}}$ e contiene i sottospazi in posizione generica rispetto alla bandiera scelta.

1 La grassmanniana di Segal-Wilson

Vogliamo definire una *grassmanniana* per H, cioè una varietà i cui punti siano degli opportuni sottospazi lineari (chiusi) di H. Un ingrediente cruciale per la costruzione successiva sarà l'ipotesi che su H sia data una *polarizzazione*, cioè una decomposizione di H in due sottospazi lineari infinito-dimensionali chiusi e mutualmente ortogonali:

$$H = H_+ \oplus H_-$$

Nel seguito indicheremo con $\pi_+ := \pi_{H_+}$ e $\pi_- := \pi_{H_-}$ i rispettivi operatori di proiezione su tali sottospazi. Un altro modo che useremo talvolta per descrivere una decomposizione di questo tipo sarà tramite un operatore (unitario) $J\colon H \to H$ per il quale H_+ sia autospazio relativo all'autovalore $+1$ e H_- sia autospazio relativo all'autovalore -1.

§1. Definizione. I seguenti concetti sono stati introdotti in [Tat68]. Sia H uno spazio lineare (infinito-dimensionale) e A e B due suoi sottospazi; diciamo che A è *non molto più grande di* B, e scriviamo $A \leq B$, se valgono le due seguenti condizioni equivalenti:

- B ha codimensione finita in $A \oplus B$ (ovvero $\dim A \oplus B/B < \infty$);
- $A \subseteq B \oplus W$ per qualche sottospazio finito-dimensionale W di H.

Questa è una relazione riflessiva e transitiva, come si verifica facilmente, ma non antisimmetrica. Diciamo che A e B sono *commensurabili*, e scriviamo $A \sim B$, se $A \leq B$ e $B \leq A$. Equivalentemente, A e B sono commensurabili se e solo se essi hanno entrambi codimensione finita in $A \oplus B$. Sussistono i seguenti risultati:

- Se $A \leq B$ allora $f(A) \leq f(B)$ per ogni applicazione lineare f;
- Dati $\{A_i\}_{i=1\dots n}$ e $\{B_j\}_{j=1\dots m}$, risulta $A_i \leq B_j$ se e solo se

$$\bigoplus_{i=1}^{n} A_i \leq \bigcap_{j=1}^{m} B_j$$

In particolare dal secondo di questi fatti deriva che le seguenti condizioni sono equivalenti:

- $A \sim B$;
- $A \oplus B \leq A$ e $A \oplus B \leq B$;
- $A \leq A \cap B$ e $B \leq A \cap B$;
- $A \oplus B \leq A \cap B$.

La Grassmanniana definita di seguito è stata introdotta in [SW85] (vedi anche [PS86]) come "completamento" dell'insieme dei sottospazi lineari chiusi di H commensurabili con H_+.

Definizione 1. L'insieme dei sottospazi lineari chiusi W di H tali che:

1. $p_+\colon W \to H_+$ è un operatore di Fredholm
2. $p_-\colon W \to H_-$ è un operatore compatto

si dice la **grassmanniana di Segal-Wilson** di H e si denota $\overline{\mathrm{Gr}}(H)$.

Gli operatori $p_\pm$ che figurano nella definizione precedente sono quelli indotti nella maniera ovvia dall'immersione canonica di W in H (ovvero, $p_\pm := \pi_\pm|_W$):

$$
\begin{tikzcd}
W \arrow[rr, hook, "i"] \arrow[dr, "p_+"'] \arrow[drrr, "p_-"' near end] & & H \arrow[dl, "\pi_+"' near start] \arrow[dr, "\pi_-"] & \\
& H_+ & & H_-
\end{tikzcd}
$$

Equivalentemente, $W \in \overline{\mathrm{Gr}}(H)$ se e solo se è l'immagine di un embedding $w\colon H_+ \to H$ tale che $w_+ := \pi_+ w$ è di Fredholm e $w_- := \pi_- w$ è compatto[1]. Notiamo che ogni sottospazio commensurabile con H_+ appartiene a $\overline{\mathrm{Gr}}(H)$: infatti se $\mathrm{codim}_W(W \cap H_+) = m$ e $\mathrm{codim}_{H_+}(W \cap H_+) = k$ allora $p_+\colon W \to H_+$ agisce come l'identità tranne che su un sottospazio m-dimensionale, e quindi la dimensione di $\ker p_+$ è maggiorata da m, la codimensione di $\mathrm{im}\, p_+$ è maggiorata da k (quindi p_+ è di Fredholm) e la dimensione di $\mathrm{im}\, p_-$ è a sua volta maggiorata da m (quindi p_- è di rango finito, quindi compatto). D'altro canto $\overline{\mathrm{Gr}}(H)$ contiene anche sottospazi che hanno intersezione nulla con H_+.

Esempio 1. Sia $\{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ una base ortonormale per H con $H_+ = \mathrm{span}\{e_k\}_{k\geq 0}$ e $H_- = \mathrm{span}\{e_k\}_{k<0}$. Un esempio di sottospazio commensurabile con H_+ è

$$W = \mathrm{span}\{e_{-2}, e_{-1} - e_1, e_2, e_3, \dots\}$$

Qui $W \cap H_+ = \mathrm{span}\{e_2, e_3, \dots\}$ che ha codimensione 2 in W e in H_+. È facile anche verificare direttamente che $W \in \overline{\mathrm{Gr}}(H)$: infatti $\mathrm{im}\, p_+ = \mathrm{span}\{e_1, e_2, e_3, \dots\}$ che ha codimensione 1 in H_+ e $\ker p_+ = \mathrm{span}\{e_{-2}\}$ che ha dimensione 1 in W, quindi p_+ è di Fredholm; inoltre $\mathrm{im}\, p_- = \mathrm{span}\{e_{-2}, e_{-1}\}$ che ha dimensione 2 in H_-, quindi p_- è di rango finito.

Esempio 2. Con le stesse notazioni di cui sopra, un esempio di sottospazio non commensurabile con H_+ ma che appartiene a $\overline{\mathrm{Gr}}(H)$ è

$$W = \mathrm{span}\{e_{-1}, e_1 - e_{-2}, e_2 - e_{-2}, \dots\}$$

Siccome $W \cap H_+ = \{0\}$ la sua codimensione sia in H_+ che in W è infinita; comunque W soddisfa ai requisiti della definizione 1, infatti $\mathrm{im}\, p_+ = \mathrm{span}\{e_1, e_2, \dots\}$ (codimensione finita in H_+), $\ker p_+ = \mathrm{span}\{e_{-1}\}$ (dimensione finita) e $\mathrm{im}\, p_- = \mathrm{span}\{e_{-1}, e_{-2}\}$ (rango finito).

Si noti che $\ker p_+ \subseteq \mathrm{im}\, p_-$ ma il primo deve avere dimensione finita mentre il secondo può essere infinito-dimensionale come conseguenza del passaggio al limite che genera un operatore compatto.

[1] L'embedding w non è altro che la composizione di un qualunque isomorfismo $H_+ \to W$ (senz'altro esistente perchè H_+ e W sono due spazi di Hilbert separabili) con l'immersione canonica di W in H; nel seguito ne vedremo una descrizione più concreta.

Esempio 3. Sempre usando le medesime notazioni, consideriamo

$$W = \operatorname{span}\{e_{-1}, e_1 - e_{-2}, e_2 - e_{-3}, \dots\}$$

Anche qui la codimensione di $W \cap H_+$ è infinita sia in W che in H_+; comunque $W \in \overline{\mathrm{Gr}}(H)$ perchè p_+ è di Fredholm (come da esempio precedente) e p_- è compatto, infatti è il limite della famiglia di operatori di rango finito $\{p_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ definiti da $e_{-1} \mapsto 0$, $e_i - e_{-i-1} \mapsto e_{-i-1}$ se $1 \le i \le N$ e 0 altrimenti.

Vogliamo ora dimostrare che $\overline{\mathrm{Gr}}(H)$ è una varietà di Banach. Sarà utile notare che:

Proposizione 1. Dato $W \in \overline{\mathrm{Gr}}(H)$, sia $K\colon W \to W^\perp$ un qualunque operatore compatto e Γ_K il suo grafico; allora $\Gamma_K \in \overline{\mathrm{Gr}}(H)$.

Dimostrazione. Notiamo anzitutto che Γ_K è un sottospazio lineare chiuso (perchè K è continuo) di $W \oplus W^\perp = H$, quindi si qualifica per l'appartenenza a $\overline{\mathrm{Gr}}(H)$. Ora, per definizione di grafico la proiezione ortogonale $\pi_W\colon H \to W$ induce per restrizione un isomorfismo $\Gamma_K \to W$; ma allora da $W \in \overline{\mathrm{Gr}}(H)$ segue che è anche $\Gamma_K \in \overline{\mathrm{Gr}}(H)$. □

In particolare quando $W = H_+$ (e dunque $W^\perp = H_-$) abbiamo che il grafico di ogni operatore $K\colon H_+ \to H_-$ compatto appartiene a $\overline{\mathrm{Gr}}(H)$; si noti che esso è commensurabile con H_+ se e solo se K è di rango finito, dato che l'intersezione $\Gamma_K \cap H_+$ non è altro che il nucleo di K, e questo ha codimensione finita in H_+ se e solo se $\dim \operatorname{im} K < \infty$.

Proposizione 2. $\overline{\mathrm{Gr}}(H)$ è una varietà di Banach modellata su $\mathcal{K}(H_+; H_-)$.

Dimostrazione. Per ogni $W \in \overline{\mathrm{Gr}}(H)$ definiamo l'insieme

$$U_W := \{\, W' \in \overline{\mathrm{Gr}}(H) \mid \pi_W|_{W'} \text{ è un isomorfismo} \,\} \tag{4}$$

Allora la proposizione 1 ci dice che il grafico di ogni operatore compatto $W \to W^\perp$ appartiene a U_W, e d'altro canto ogni elemento di U_W è il grafico di un operatore siffatto; se ne conclude che esiste una bigezione tra U_W e lo spazio di Banach $\mathcal{K}(W; W^\perp)$. Abbiamo dunque un ricoprimento di $\overline{\mathrm{Gr}}(H)$ formato da insiemi in bigezione con una famiglia di spazi di Banach; l'unica cosa da verificare è che queste carte locali si incollino nella maniera corretta. Siano dati dunque due punti $W_0, W_1 \in \overline{\mathrm{Gr}}(H)$ e siano U_{W_0} e U_{W_1} i corrispondenti sottoinsiemi definiti dalla (4); allora si hanno le due bigezioni

$$\varphi_0\colon U_{W_0} \to \mathcal{K}(W_0; W_0^\perp) =: I_0$$
$$\varphi_1\colon U_{W_1} \to \mathcal{K}(W_1; W_1^\perp) =: I_1$$

Consideriamo ora l'intersezione $U_{W_0} \cap U_{W_1}$ e le sue due immagini in I_0 e I_1:

$$\begin{tikzcd} & I_{01} \subseteq I_0 \\ U_{W_0} \cap U_{W_1} \arrow[ur, "\varphi_0"] \arrow[dr, "\varphi_1"'] & \\ & I_{10} \subseteq I_1 \end{tikzcd}$$

Occorre dimostrare che I_{01} e I_{10} sono aperti e che il "cambio di coordinate" $I_{01} \to I_{10}$ è analitico.

Consideriamo l'applicazione identica

$$\mathrm{id}\colon \underbrace{W_0 \oplus W_0^\perp}_{H} \to \underbrace{W_1 \oplus W_1^\perp}_{H}$$

la cui matrice associata, con le decomposizioni di H scelte, si scriverà

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Da quanto vedremo in §2 segue che a e d sono operatori di Fredholm mentre b e c sono compatti. Prendiamo un punto $W \in U_{W_0} \cap U_{W_1}$ qualsiasi; ciò significa che $W \in \overline{\mathrm{Gr}}(H)$ è simultaneamente il grafico di due operatori compatti $T_0\colon W_0 \to W_0^\perp$ e $T_1\colon W_1 \to W_1^\perp$. Allora gli operatori

$$A\colon W_0 \to W_1 \oplus W_1^\perp \text{ definito da } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{W_0} \\ T_0 \end{pmatrix}$$
$$B\colon W_1 \to W_1 \oplus W_1^\perp \text{ definito da } \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{W_1} \\ T_1 \end{pmatrix}$$

hanno lo stesso grafico e quindi coincidono tra loro a meno di un isomorfismo $q\colon W_0 \to W_1$ tale che $A = Bq$. Eliminando q da tale uguaglianza si ottiene l'identità

$$T_1 = (c + dT_0)(a + bT_0)^{-1} \tag{5}$$

che esprime T_1 come funzione analitica di T_0 nell'aperto

$$I_{01} = \{\, T_0 \in I_0 \mid a + bT_0 \text{ è invertibile} \,\} \qquad \square$$

Talvolta sentiremo la necessità di imporre delle condizioni più restrittive su p_-: per esempio se richiediamo che p_- sia non solo compatto, ma anche un operatore di Hilbert-Schmidt otteniamo una grassmanniana leggermente più piccola che indicheremo con $\overline{\mathrm{Gr}}^2(H)$. Si dimostra allora, in maniera del tutto analoga alla precedente, che tale grassmanniana è una varietà di Hilbert modellata su $\mathcal{C}_2(H_+; H_-)$ (questo è l'approccio seguito sistematicamente in [PS86]).

§2. Azione del gruppo lineare ristretto. Se $\overline{\mathrm{Gr}}(H)$ contenesse la totalità dei sottospazi lineari chiusi di H allora il gruppo $\mathrm{GL}(H)$ degli operatori invertibili su H agirebbe su $\overline{\mathrm{Gr}}(H)$ nella maniera ovvia. Tuttavia a causa delle restrizioni poste dalla definizione 1 non tutti gli operatori invertibili mandano un sottospazio di $\overline{\mathrm{Gr}}(H)$ in un sottospazio che sta ancora in $\overline{\mathrm{Gr}}(H)$; definiamo allora un gruppo lineare "ristretto" per il quale l'azione sussista.

Cominciamo col notare che usando la polarizzazione $H = H_+ \oplus H_-$ ogni operatore $g \in \mathrm{GL}(H)$ si può scrivere come una matrice a blocchi del tipo

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \text{con} \qquad \begin{matrix} a\colon H_+ \to H_+ & b\colon H_- \to H_+ \\ c\colon H_+ \to H_- & d\colon H_- \to H_- \end{matrix} \tag{6}$$

Supponiamo ora che gli operatori b e c siano compatti; allora a e d sono automaticamente di Fredholm. Infatti per ipotesi esiste $g^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right)$ tale che $gg^{-1} = \mathrm{id}_H$ e quindi in particolare deve essere

$$\begin{cases} aa' + bc' = \mathrm{id}_H \\ cb' + dd' = \mathrm{id}_H \end{cases}$$

cioè, aa' e dd' differiscono dall'identità per un operatore compatto. Similmente dall'uguaglianza $g^{-1}g = \mathrm{id}_H$ segue che $a'a$ e $d'd$ differiscono dall'identità per un compatto, e quindi a e d sono invertibili modulo un compatto, cioè sono operatori di Fredholm.

Denotiamo ora con $\overline{\mathrm{GL}}_{\mathrm{res}}(H)$ il sottoinsieme di $\mathrm{GL}(H)$ formato dagli elementi che, nella scomposizione (6), hanno come blocchi b e c due operatori compatti. Equivalentemente si può porre

$$\overline{\mathrm{GL}}_{\mathrm{res}}(H) := \{\, g \in \mathrm{GL}(H) \mid [J, g] \ \text{ è compatto} \,\}$$

infatti $J = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ e dunque

$$[J, g] = \begin{pmatrix} 0 & 2b \\ -2c & 0 \end{pmatrix}$$

che è compatto se e solo se b e c sono separatamente compatti.

Proposizione 3. $\overline{\mathrm{GL}}_{\mathrm{res}}(H)$ è un sottogruppo chiuso di $\mathrm{GL}(H)$, detto il **gruppo generale lineare ristretto** di H.

Questo segue dal fatto che gli operatori compatti formano un ideale di $\mathcal{L}(H)$: infatti supponiamo dati $g, g' \in \mathrm{GL}(H) \subseteq \mathcal{L}(H)$ tali che $[J, g]$ e $[J, g']$ sono compatti, allora

$$[J, gg'] = [J, g]\, g' + g\, [J, g']$$

che è somma di due compatti, quindi è compatto.

Notiamo che il ragionamento precedente sopravvive inalterato sostituendo a $\mathcal{K}(H)$ un qualunque altro ideale bilatero di $\mathcal{L}(H)$ contenuto in esso; in particolare imponendo che b e c siano operatori di Hilbert-Schmidt si ottiene un secondo sottogruppo di $\mathrm{GL}(H)$ (strettamente incluso in $\overline{\mathrm{GL}}_{\mathrm{res}}(H)$) che denoteremo $\overline{\mathrm{GL}}^2_{\mathrm{res}}(H)$.

Vogliamo ora dimostrare che il gruppo $\overline{\mathrm{GL}}_{\mathrm{res}}(H)$ agisce su $\overline{\mathrm{Gr}}(H)$. A tale scopo, dato $W \in \overline{\mathrm{Gr}}(H)$ consideriamo l'embedding $w\colon H_+ \to H$ che ha W per immagine; allora $w = w_+ \oplus w_-$ con w_+ di Fredholm e w_- compatto. Preso $g \in \overline{\mathrm{GL}}_{\mathrm{res}}(H)$, l'embedding $w'\colon H_+ \to H$ la cui immagine è il sottospazio $W' := gW$ sarà dato dalla composizione di g dopo w:

$$\begin{pmatrix} w'_+ \\ w'_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_+ \\ w_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aw_+ + bw_- \\ cw_+ + dw_- \end{pmatrix} \tag{7}$$

Ne segue che w'_+ è di Fredholm (in quanto somma di un Fredholm e di un compatto) e w'_- è compatto (in quanto somma di due compatti), quindi $W' \in \overline{\mathrm{Gr}}(H)$. Inoltre l'azione è transitiva: per vederlo basta mostrare che per ogni $W \in \overline{\mathrm{Gr}}(H)$ esiste un operatore di $\overline{\mathrm{GL}}_{\mathrm{res}}(H)$ che manda H_+ in W, e un operatore siffatto è ad esempio

$$\begin{pmatrix} w_+ & w_+^* \\ w_- & w_-^* \end{pmatrix}$$

Si noti che per ogni elemento di $\overline{\mathrm{GL}}_{\mathrm{res}}(H)$ l'indice di d è determinato da quello di a, risulta infatti

$$i(a) = -i(d)$$

dal momento che l'operatore (di Fredholm) $a \oplus d$ può essere deformato linearmente nell'operatore invertibile (e quindi di indice zero) $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ tramite operatori di Fredholm.

Topologicamente, il gruppo $\overline{\mathrm{GL}}_{\mathrm{res}}(H)$ è disconnesso; due operatori g_1 e g_2 appartengono alla medesima componente connessa se e solo se $i(a_1) = i(a_2)$. In altri termini, le componenti connesse di $\overline{\mathrm{GL}}_{\mathrm{res}}(H)$ sono etichettate dall'indice dell'operatore di Fredholm a. Questo è una conseguenza del seguente risultato [PS86, prop. 6.2.4]:

Proposizione 4. L'applicazione $\overline{\mathrm{GL}}_{\mathrm{res}}(H) \to \mathcal{F}(H_+)$ definita da $g \mapsto a$ è un'equivalenza omotopica.

Analogamente si vede che il gruppo $\overline{\mathrm{GL}}^2_{\mathrm{res}}(H)$ agisce sulla "grassmanniana di Hilbert-Schmidt" $\overline{\mathrm{Gr}}^2(H)$ e l'azione è transitiva a patto di restringersi al sottogruppo $\overline{\mathrm{U}}^2_{\mathrm{res}}(H)$ formato dagli operatori unitari [PS86, prop 7.13].

§3. Dimensione virtuale. Per un sottospazio commensurabile con H_+ sarebbe naturale definire un concetto di "dimensione di W relativa a H_+" come l'intero

$$\operatorname{codim}_W(W \cap H_+) - \operatorname{codim}_{H_+}(W \cap H_+)$$

Così il sottospazio dell'esempio 1 avrebbe dimensione zero relativa a H_+. Tale concetto può essere generalizzato all'intera $\overline{\mathrm{Gr}}(H)$ come segue:

Definizione 2. Dato $W \in \overline{\mathrm{Gr}}(H)$, la **dimensione virtuale** di W è l'indice dell'operatore di Fredholm p_+:

$$\operatorname{vdim} W := i(p_+) = \dim\ker p_+ - \dim\operatorname{coker} p_+$$

Con questa definizione tutti i sottospazi degli esempi 1–3 risultano avere dimensione virtuale zero. Notiamo che è anche

$$\operatorname{vdim} W = \dim(W \cap H_-) - \dim(W^\perp \cap H_+)$$

La dimensione virtuale partiziona $\overline{\mathrm{Gr}}(H)$ in un insieme infinito (etichettato da $\mathbb{Z}$) di componenti connesse tutte isomorfe tra loro. Poichè nelle applicazioni ci limiteremo a considerare la componente connessa formata dai sottospazi di dimensione virtuale zero, è comodo avere una notazione apposita: definiamo quindi

$$\mathrm{Gr}(H) := \{\, W \in \overline{\mathrm{Gr}}(H) \mid \operatorname{vdim} W = 0 \,\}$$

Un sottospazio $W \subseteq H$ appartiene alla componente $\mathrm{Gr}(H)$ se e solo se è l'immagine di un embedding $w \colon H_+ \to H$ che differisce dall'immersione canonica per un operatore compatto.

È naturale chiedersi come varia la dimensione virtuale di un sottospazio di $\overline{\mathrm{Gr}}(H)$ sotto l'azione di $\overline{\mathrm{GL}}_{\mathrm{res}}(H)$. Notiamo anzitutto che $i(p_+) = i(w_+)$, dato che i due operatori differiscono tra loro per un isomorfismo. La risposta alla domanda precedente viene allora dalla (7), da cui leggiamo che

$$w'_+ = aw_+ + bw_-$$

e quindi

$$i(w'_+) = i(aw_+) = i(a) + i(w_+)$$

cioè

$$\operatorname{vdim} g.W = \operatorname{vdim} W + i(a)$$

In particolare per muoversi in $\mathrm{Gr}(H)$ occorre considerare solo la componente connessa di $\overline{\mathrm{GL}}_{\mathrm{res}}(H)$ formata dagli operatori di indice zero, che denoteremo $\mathrm{GL}_{\mathrm{res}}(H)$.

§4. Carte locali. Da qui in avanti conviene realizzare H come uno spazio di Hilbert più concreto. D'ora in poi opereremo dunque sotto l'identificazione $H = L^2(S^1; \mathbb{C})$ (spazio delle funzioni periodiche a quadrato integrabile a valori complessi) con prodotto scalare

$$\langle f, g \rangle = \int_{S^1} f\, \bar{g}\, \mathrm{d}\mu$$

dove μ è la misura di Lebesgue (normalizzata) su S^1. Useremo spesso l'embedding di S^1 nel piano complesso definito come segue: dato $R \in \mathbb{R}^+$, a S^1 (visto ad esempio come l'intervallo reale $[0, 1]$ con gli estremi identificati) corrisponde la circonferenza $S^1(R)$ di centro 0 e raggio R in $\mathbb{C}$ tramite il diffeomorfismo $z := \vartheta \mapsto R\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\vartheta}$. Allora come base ortonormale per H è naturale prendere $\{z^k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, ovvero la base dell'espansione in serie di Fourier su S^1: infatti per ogni $f \in H$ si ha l'uguaglianza (in L^2)

$$f(\theta) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}k\theta} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{f_k}{R^k} z(\theta)^k \tag{8}$$

per opportuni coefficienti $f_k \in \mathbb{C}$. La polarizzazione è quella ovvia:

$$H_+ := \operatorname{span}\{z^k\}_{k\geq 0} \quad \text{e} \quad H_- := \operatorname{span}\{z^k\}_{k<0}$$

D'ora in avanti indicheremo con $\overline{\mathrm{Gr}}(R)$ la grassmanniana che si ottiene con questa scelta di H. Evidentemente le varietà di Banach che si ottengono in questo modo al variare del parametro $R \in \mathbb{R}^+$ sono tutte isomorfe tra loro. Spesso i discorsi che faremo non dipenderanno dal particolare R scelto, nel qual caso useremo la notazione “generica” $\overline{\mathrm{Gr}}$ (per una definizione precisa di tale simbolo si veda §4.1 più avanti).

Notiamo che, con l’embedding sopra definito, l’espansione in serie di Fourier su S^1 corrisponde all’espansione in serie di Laurent su $\mathbb{C}$ in un qualche anello centrato in 0. Infatti supponiamo per un attimo che f sia la restrizione su $S^1(R)$ di una funzione definita sul disco $D_0(R) := \{z \in \mathbb{C} |\, |z| \leq R\}$ e olomorfa su di esso (tranne che eventualmente in zero), allora f ammette un’espansione in serie di Laurent

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k z^k \tag{9}$$

dove stavolta z è la coordinata naturale su $\mathbb{C}$, ed è chiaro che i coefficienti delle due serie (8) e (9) devono coincidere tra loro (sussiste cioè la relazione $f_k = R^k c_k$). In particolare H_+, essendo generato dalle potenze positive di z, può essere interpretato come lo spazio delle funzioni $S^1(R) \to \mathbb{C}$ che si estendono a funzioni olomorfe sull’intero $D_0(R)$, nel qual caso la (34) diventa un’ordinaria serie di potenze. Similmente se supponiamo di lavorare non su $\mathbb{C}$ ma sulla sfera di Riemann $P^1_{\mathbb{C}}$ (il che la cosa naturale da fare, come vedremo) abbiamo che H_- si identifica con lo spazio delle funzioni $S^1(R) \to \mathbb{C}$ che si estendono a funzioni olomorfe sul disco $D_\infty(R) := \{z \in P^1_{\mathbb{C}} |\, |z| \geq R\}$ e che si annullano all’infinito (causa assenza del termine costante).

Consideriamo ora una particolare famiglia di sottospazi di H. Sia $S \subseteq \mathbb{Z}$ un qualunque insieme di numeri interi e definiamo

$$H_S := \operatorname{span}\{z^s\}_{s \in S} \tag{10}$$

Evidentemente

$$\begin{cases} \ker p_+ \colon H_S \to H_+ & \text{è generato da } \{z^i\}_{i \in S \setminus \mathbb{N}} \\ \operatorname{coker} p_+ \colon H_S \to H_- & \text{è generato da } \{z^i\}_{i \in \mathbb{N} \setminus S} \end{cases}$$

Allora p_+ è di Fredholm se e solo se i due insiemi $S \setminus \mathbb{N}$ (interi negativi che figurano in S) e $\mathbb{N} \setminus S$ (interi non negativi che *non* figurano in S) sono entrambi finiti. Si noti altresì che, sotto queste ipotesi, p_- risulta automaticamente compatto (in effetti di rango finito). Se ne conclude che il sottospazio H_S definito dalla (10) appartiene alla grassmanniana $\overline{\mathrm{Gr}}$ se e solo se S soddisfa le due condizioni precedenti (cioè ha un numero finito di elementi negativi e un numero finito di buchi tra gli elementi positivi, ovvero è inferiormente limitato e contiene tutti i numeri naturali da un certo punto in avanti); denotiamo $\mathscr{S}$ l’insieme formato da tutti gli S siffatti. Per ogni $S \in \mathscr{S}$ definiamo la *cardinalità virtuale* di S come

$$\operatorname{vcard} S := \operatorname{card}(S \setminus \mathbb{N}) - \operatorname{card}(\mathbb{N} \setminus S)$$

e ne segue allora che $\operatorname{vcard} S = \operatorname{vdim} H_S$. L’insieme formato da tutti gli $S \in \mathscr{S}$ di cardinalità virtuale d sarà denotato $\mathscr{S}_d$.

Proposizione 5. Per ogni $W \in \overline{\mathrm{Gr}}$ esiste $S \in \mathscr{S}$ tale che la proiezione ortogonale $\pi_S := \pi_{H_S}$ induce un isomorfismo $W \to H_S$.

Equivalentemente, W coincide con il grafico di un operatore compatto $K\colon H_S \to H_S^\perp$; esplicitamente esso è dato da

$$K = \pi_{S^\perp}\, \pi_S|_W^{-1} \tag{11}$$

dovendo essere $\pi_S|_W^{-1}(f) = f + K(f)$ per ogni $f \in H_S$.

Dimostrazione. Per ipotesi $\ker p_+$ è un sottospazio di dimensione finita in W (e quindi in H_-), allora esistono $s_1, \dots, s_n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ tali che l'insieme $\{z^{s_1}, \dots, z^{s_n}\}$ lo genera. Sia $S_0 := \mathbb{N} \cup \{s_1, \dots, s_n\}$; allora $S_0 \in \mathscr{S}$ e per costruzione la proiezione ortogonale su H_{S_0} ristretta a W è iniettiva. Se non è anche surgettiva allora esiste $s \in S_0$ tale che z^s non sta nella sua immagine; allora preso $S_1 := S_0 \setminus \{s\}$ la proiezione $W \to H_{S_1}$ è ancora iniettiva. Ripetendo questo processo un numero finito di volte (perchè p_+ ha conucleo di dimensione finita) si ottiene l'insieme S cercato. $\square$

Allora posto $U_S := U_{H_S}$ (cfr. (4)) abbiamo che l'insieme $\{U_S\}_{S \in \mathscr{S}}$ costituisce un ricoprimento aperto di $\overline{\mathrm{Gr}}$; esso può quindi essere visto come una *famiglia di carte locali* su $\overline{\mathrm{Gr}}$ *indiciata da* $\mathscr{S}$. Esso rappresenta, come vedremo più avanti, l'analogo dell'usuale ricoprimento tramite aperti affini di una grassmanniana finito-dimensionale.

Preso $V \in \overline{\mathrm{Gr}}$ qualunque, diciamo che un sottospazio $W \in \overline{\mathrm{Gr}}$ è **trasverso a** $V^\perp$ se $W \in U_V$, ovvero la proiezione ortogonale $\pi_V\colon H \to V$ ristretta a W è un isomorfismo, ovvero W coincide con il grafico di un operatore $V \to V^\perp$ compatto. In particolare la proposizione 5 ci dice che ogni W è trasverso a qualche $H_S^\perp$. Quando $S = \mathbb{N}$ parleremo semplicemente di sottospazi **trasversi** (sottintendendo "rispetto a H_-"); tali sottospazi hanno dimensione virtuale zero e formano un aperto denso $U_\mathbb{N}$ in Gr, detto la **grande cella** (la situazione nelle altre componenti connesse è analoga). Si noti per inciso che in tal caso risulta $\pi_S|_W = p_+$, quindi la (11) si legge $K = \pi_- p_+^{-1} = p_- p_+^{-1}$.

Esempio 4. Riconsideriamo i sottospazi degli esempi 1–3. Per quanto riguarda il primo, essendo $\ker p_+ = \operatorname{span}\{z^{-2}\}$ risulta $S_0 = \{-2, 0, 1, 2, 3, \dots\}$; inoltre $\operatorname{coker} p_+ = \operatorname{span}\{1\}$, occorre quindi scartare 0 ottenendo così $S = \{-2, 1, 2, 3, \dots\}$. In effetti W coincide con l'immagine dell'operatore di rango finito $H_S \to H_S^\perp$ che manda z in z^{-1} e tutto il resto in zero. Quanto al sottospazi degli esempi 2–3, procedendo analogamente si ottiene per entrambi $S = \{-1, 1, 2, \dots\}$; il primo è l'immagine dell'operatore definito da $z^{-1} \mapsto 0$ e $z^i \mapsto z^{-2}$ per ogni $i \geq 1$, il secondo dell'operatore definito da $z^{-1} \mapsto 0$ e $z^i \mapsto z^{-i-1}$ per ogni $i \geq 1$.

Più concretamente, un punto di U_S è il grafico di un operatore compatto $H_S \to H_S^\perp$ e può quindi essere visto come una matrice $\bar{S} \times S$, dove $\bar{S} := \mathbb{Z} \setminus S$. Così per il sottospazio dell'esempio 1 la matrice in questione risulta[2]

$$\begin{array}{c} \\ 0 \\ -1 \\ -3 \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} -2 & 1 & 2 & \dots \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \end{array}$$

e per i sottospazi degli altri due esempi risulta similmente

$$\begin{array}{c} \\ 0 \\ -2 \\ -3 \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} -1 & 1 & 2 & 3 & \dots \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{c} \\ 0 \\ -2 \\ -3 \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} -1 & 1 & 2 & 3 & \dots \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \end{array}$$

Le funzioni di transizione da una carta all'altra sono date dall'espressione (5) dove la matrice $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ è una *matrice di permutazione*, ovvero differisce dall'identità solo per la permutazione di un numero finito di colonne; in particolare i blocchi b e c hanno un numero finito di elementi diversi da zero. Ad esempio per il primo sottospazio un'altra possibile scelta per l'insieme degli indici è $S' = \{-2, -1, 2, 3, \dots\}$, e W risulta allora il grafico dell'operatore che manda tutto in zero tranne $z^{-1} \mapsto z$. La matrice associata sarebbe allora

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 0 \\ -3 \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} -2 & -1 & 2 & \dots \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \end{array}$$

e la matrice di permutazione in questione è quella associata all'applicazione identica vista come applicazione $H_S \oplus H_S^{\perp} \to H_{S'} \oplus H_{S'}^{\perp}$:

$$\begin{array}{c} \\ -2 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ -3 \\ -4 \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} -2 & 1 & 2 & 3 & \dots & 0 & -1 & -3 & -4 & \dots \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}\right) \end{array}$$

[2]Per rappresentare in maniera sensata le matrici i cui indici corrono su $\mathbb{Z}$ (o suoi sottoinsiemi) adotteremo la convenzione di annotare esplicitamente, accanto a ciascuna riga e a ciascuna colonna, l'indice corrispondente.

Fissiamo ora una cardinalità virtuale $d \in \mathbb{Z}$. Un generico insieme $S \in \mathscr{S}_d$ può essere scritto canonicamente come segue:

$$S = \{s_{-d}, s_{-d+1}, \dots\}$$

con $s_{-d} < s_{-d+1} < \dots$ ed esiste $k^* \in \mathbb{N}$ tale che $s_k = k$ per ogni $k > k^*$. Denotiamo ora con $\mathscr{P}$ l'insieme di tutte le *partizioni* (successioni di numeri naturali quasi tutti nulli); allora:

Proposizione 6. L'applicazione $\lambda\colon \mathscr{S}_d \to \mathscr{P}$ definita da $(\lambda(S))_i := (i-d) - s_{i-d}$ è una bigezione.

Dimostrazione. Dato $S \in \mathscr{S}_d$ qualunque, per $i > d+k^*$ si ha $(\lambda(S))_i = (i-d)-(i-d) = 0$ quindi $\lambda(S)$ è una partizione. Viceversa data una partizione $\{\lambda_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ l'insieme $\{s_k\}_{k\geq -d}$ definito ponendo $s_k := k - \lambda_{k+d}$ appartiene a $\mathscr{S}_d$. Che la corrispondenza sia iniettiva è ovvio. $\square$

Ad ogni partizione si associa un corrispondente diagramma di Young,

$$D_\lambda := \{\, (i,j) \in \mathbb{N}^2 \mid 0 \leq j \leq \lambda_i - 1 \,\}$$

Tra diagrammi di Young è definita la relazione di inclusione $\subseteq$; su $\mathscr{S}_d$ tale relazione d'ordine (parziale), che denotiamo $\leq$, si legge

$$S \leq S' \text{ se e solo se } s_k \geq s'_k \text{ per ogni } k \geq -d \tag{12}$$

Se denotiamo con $d_m(S)$ il numero di elementi di S minori o uguali a m abbiamo che $S \leq S'$ se e solo se $d_m(S) \leq d_m(S')$ per ogni m.

Definiamo il **peso**[3] di $S \in \mathscr{S}_d$ come il peso della corrispondente partizione:

$$|S| := |\lambda(S)| = \sum_{i\geq 0} ((i-d) - s_{i-d})$$

Ovviamente $S \leq S'$ implica $|S| \leq |S'|$. Notiamo che se n è il numero di "buchi" tra gli elementi positivi di S allora la partizione corrispondente comprende un quadrato $n \times n$ nell'angolo in alto a sinistra. Per esempio, alla partizione $\lambda = (21)$ si possono associare l'insieme di cardinalità virtuale zero $\{-2, 0, 2, \dots\}$, quello di cardinalità virtuale uno $\{-3, -1, 1, \dots\}$, quello di cardinalità virtuale -1 $\{-1, 1, 3, \dots\}$, e così via.

§5. Stratificazione. Per ogni $f \in H$ definiamo l'**ordine** di f come l'intero che corrisponde al massimo coefficiente f_i diverso da zero (se questo esiste). Un elemento f di ordine finito e pari a k si scrive quindi

$$f = \sum_{i\leq k} f_i z^i$$

[3] Inspiegabilmente chiamato "lunghezza" in [SW85] e [PS86]; ricordiamo che la lunghezza di una partizione è il numero delle sue parti non nulle.

Esso corrisponde al contorno di una funzione olomorfa nel disco $D_\infty(R)$ tranne che per un polo di ordine k nel punto all'infinito.

Dato un qualunque sottospazio W di H, denotiamo W^{alg} il sottoinsieme formato dai suoi elementi di ordine finito. In particolare per ogni $S \in \mathscr{S}$ abbiamo che H_S^{alg} è un insieme di polinomi di Laurent, dato che il numero di coefficienti con indice negativo è anch'esso finito.

Proposizione 7. Per ogni $W \in \overline{\mathrm{Gr}}$ il sottospazio W^{alg} è denso in W.

Infatti l'isomorfismo $W \to H_S$ induce un isomorfismo tra W^{alg} e H_S^{alg}, ed è ovvio che gli elementi di ordine finito formano un sottospazio denso in H_S.

Sia ora dato $m \in \mathbb{Z}$ e consideriamo lo spazio lineare formato dall'insieme degli elementi di W di ordine minore o uguale a m:

$$W_m := W \cap z^{m+1} H_-$$

Questi sono evidentemente sottospazi lineari *finito-dimensionali* di W^{alg}. Definiamo inoltre

$$S_W := \{\, s \in \mathbb{Z} \mid W \text{ contiene un elemento di ordine } s \,\}$$

allora $S_W \in \mathscr{S}$ e $\operatorname{vcard} S_W$ coincide proprio con la dimensione virtuale di W, più precisamente

$$d_m(S_W) = \dim W_m$$

e se m è sufficientemente grande da far sì che la proiezione $W \to z^{m+1}H_+$ sia surgettiva allora tale numero coincide con $m + 1 + d$ (dove $d := \operatorname{vdim} W$).

Ora, per ogni $s_i \in S_W$ (con $i \geq -d$) sia w_i un elemento di W monico di ordine s_i; allora l'insieme $\{w_i\}_{i \geq -d}$ costruito in questo modo è una base per lo spazio lineare W^{alg}. Inoltre S_W è per definizione uno di quegli elementi di $\mathscr{S}$ tali che la proiezione ortogonale $W \to H_{S_W}$ è un isomorfismo; ciò significa che è possibile scegliere in un unico modo i w_i in modo tale che risulti $\pi_{S_W}(w_i) = z^{s_i}$ per ogni $s \in S_W$.

Definizione 3. L'insieme $\{w_i\}_{i \geq -d}$ così ottenuto si dice la **base canonica** per W.

Se poi $K \colon H_{S_W} \to H_{S_W}^{\perp}$ è l'operatore compatto il cui grafico è W abbiamo che gli elementi della base canonica si possono esprimere in funzione degli elementi di matrice di K (e viceversa) come

$$w_i = z^{s_i} + \sum_{p \in \bar{S}_W} K_{p s_i} z^p \tag{13}$$

al variare di $i \geq -d$ (ricordiamo che $\bar{S} = \mathbb{Z} \setminus S$).

Definizione 4. Per ogni $S \in \mathscr{S}$ definiamo lo **strato** di $\overline{\mathrm{Gr}}$ associato a S come

$$\Sigma_S = \{\, W \in \overline{\mathrm{Gr}} \mid S_W = S \,\}$$

Si tratta cioè di tutti i sottospazi di $\overline{\mathrm{Gr}}$ tali che $\dim W_m = d_m(S)$ per ogni m, o se si preferisce tali che W^{alg} ammette una base formata da elementi di ordine s_i.

Sia ora $\mathscr{N}_-$ il sottogruppo delle "matrici triangolari inferiori" di $\overline{\mathrm{GL}}_{\mathrm{res}}(H)$, ovvero degli operatori A tali che $A(z^k H_-) = z^k H_-$ e $(A - \mathrm{id})(z^k H_-) \subseteq z^{k-1} H_-$ per ogni k. Si dimostra (vedi [PS86, prop. 7.3.3]) il seguente risultato:

Proposizione 8. Per ogni $S \in \mathscr{S}$ si ha che:

1. Σ_S è una sottovarietà chiusa e contraibile di codimensione $|S|$ nell'aperto U_S;
2. Σ_S coincide con l'orbita di H_S sotto l'azione di $\mathscr{N}_-$;
3. se $W \in U_S$ allora $S \geq S_W$;
4. la chiusura di Σ_S è l'unione $\bigcup_{S' \geq S} \Sigma_{S'}$.

Dimostrazione. (1) Abbiamo già visto che $\Sigma_S \subseteq U_S$. Ora se $W \in U_S$ allora $W \to H_S$ è un isomorfismo, quindi W ha un'unica base $\{w_s\}$ che si proietta in $\{z^s\}$. Per l'unicità, W appartiene a Σ_S se e solo se w_s ha ordine s per ogni s. Se W è il grafico di $T\colon H_S \to H_S^{\perp}$, cioè $w_s = z^s + Tz^s$, allora $W \in \Sigma_S$ esattamente quando gli elementi di matrice T_{pq} si annullano quando $p > q$. Il numero di coppie $(p, q) \in \bar{S} \times S$ tali che $p > q$ coincide con il peso di S. Quindi Σ_S corrisponde a un sottospazio di Hilbert di H di codimensione $|S|$.

(2) Supponiamo che $W \in \Sigma_S$ sia il grafico di $T\colon H_S \to H_S^{\perp}$. Sia π_S la proiezione ortogonale su H_S; allora $A = 1 + T \circ \pi_S$ appartiene a $\mathscr{N}_-$ e $A(H_S) = W$.

(3) La proiezione perpendicolare su H_S può solo che abbassare l'ordine di un elemento, quindi se $W \to H_S$ è un isomorfismo allora H_S deve avere almeno tanti elementi linearmente indipendenti di ordine minore o uguale a m quanti ne ha W, cioè

$$\mathrm{card}\,\{\, s \in S \mid s \leq m \,\} \geq \mathrm{card}\,\{\, s \in S_W \mid s \leq m \,\}$$

per ogni m. Questo equivale a dire che $S \geq S_W$.

(4) Dal punto precedente segue che la chiusura di Σ_S è contenuta nell'unione dei $\Sigma_{S'}$ con $S' \geq S$. Ma se $S' > S$ sia W_t il sottospazio generato da

$$(1-t)z^{s_k} + tz^{s'_k}$$

per $k \geq -d$. Se $0 \leq t < 1$ allora W_t appartiene a Σ_S; se $t = 1$ allora $W_t = H_{S'} \in \Sigma_S$. Allora la chiusura di Σ_S interseca $\Sigma_{S'}$. La chiusura deve allora contenere $\Sigma_{S'}$ perchè $\Sigma_{S'}$ è una singola orbita del gruppo $\mathscr{N}_-$. $\square$

Se ne conclude che la famiglia $\{\Sigma_S\}_{S \in \mathscr{S}}$ determina una *stratificazione* di $\overline{\mathrm{Gr}}$ tramite sottovarietà di codimensione finita. Dal punto 3 segue inoltre che per ogni $W \in \overline{\mathrm{Gr}}$ esiste un unico $S \in \mathscr{S}$ *minimale* rispetto alla relazione d'ordine $\leq$ tale che $W \in U_S$ (e si tratta ovviamente di S_W); ciascuno strato Σ_S coincide proprio con l'insieme dei sottospazi $W \in \overline{\mathrm{Gr}}$ che ammettono S come tale insieme minimale.

§6. Decomposizione in celle. In $\overline{\mathrm{Gr}}$ si può introdurre una sotto-grassmanniana che ha particolare importanza.

Definizione 5. Indichiamo con $\overline{\mathrm{Gr}}_0$ l'insieme di tutti i sottospazi $W \in \overline{\mathrm{Gr}}$ per cui esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che

$$z^k H_+ \subseteq W \subseteq z^{-k} H_+ \tag{14}$$

Se per ogni $k \in \mathbb{N}$ definiamo lo spazio lineare complesso $H_{-k,k} := z^{-k}H_+/z^k H_+$ di dimensione $2k$ allora risulta

$$\overline{\mathrm{Gr}}_0 = \bigcup_{k \geq 0} \mathrm{Gr}(H_{-k,k})$$

In altri termini la grassmanniana (infinito-dimensionale) $\overline{\mathrm{Gr}}_0$ non è altro che l'unione di una famiglia numerabile di grassmanniane "classiche" (finito-dimensionali). In termini di carte locali, $\overline{\mathrm{Gr}}_0$ consiste dei grafici degli operatori $H_S \to H_S^{\perp}$ (al variare di $S \in \mathscr{S}$) aventi un numero finito di elementi di matrice non nulli; questi sono evidentemente densi in $\mathcal{K}(H_S; H_S^{\perp})$, quindi $\overline{\mathrm{Gr}}_0$ è densa in $\overline{\mathrm{Gr}}$.

Proposizione 9. Ogni funzione olomorfa $\overline{\mathrm{Gr}} \to \mathbb{C}$ è costante su ciascuna componente connessa.

Dimostrazione. Per quanto appena detto è sufficiente dimostrare la tesi su $\overline{\mathrm{Gr}}_0$; ma quest'ultima è l'unione di grassmanniane finito-dimensionali, che sono varietà algebriche compatte; pertanto ogni funzione olomorfa su di esse è localmente costante. □

Definiamo inoltre la componente di indice zero di $\overline{\mathrm{Gr}}_0$ nella maniera ovvia:

$$\mathrm{Gr}_0 := \overline{\mathrm{Gr}}_0 \cap \mathrm{Gr}$$

Ciò equivale ad imporre, oltre alla condizione (14), che la proiezione $p_+ \colon W \to H_+$ abbia nucleo e conucleo di dimensione uguale.

Lo spazio $\overline{\mathrm{Gr}}_0$ ammette una decomposizione in celle analoga alla decomposizione in celle di Schubert per le grassmanniane finito-dimensionali. Questa decomposizione è "duale" rispetto alla stratificazione di Gr precedentemente descritta, nel seguente senso:

- lo stesso insieme $\mathscr{S}$ indicizza le celle e gli strati;
- la dimensione di C_S è pari alla codimensione di Σ_S in U_S;
- C_S interseca Σ_S trasversalmente in un singolo punto, e non interseca altri strati della stessa codimensione.

Per descrivere C_S definiamo il **co-ordine** di un elemento $f \in W$ per $W \in \overline{\mathrm{Gr}}_0$ come il minimo k tale che $f_k \neq 0$ (un tale k esiste per definizione di $\overline{\mathrm{Gr}}_0$); allora fissato $W \in \overline{\mathrm{Gr}}_0$ l'insieme

$$S^W = \{\, s \in \mathbb{Z} \mid W \text{ contiene un elemento di coordine } s \,\}$$

appartiene a $\mathscr{S}$. Definiamo

$$C_S := \{\, W \in \overline{\mathrm{Gr}}_0 \mid S^W = S \,\}$$

Equivalentemente, C_S consiste dei $W \in \overline{\mathrm{Gr}}_0$ tali che W^{alg} ha una base $\{w_s\}_{s \in S}$ con w_s della forma

$$w_s = z^s + \sum_{i > s} \alpha_{si} z^i$$

Introduciamo il sottogruppo $\mathcal{N}_+$ di $\overline{\mathrm{GL}}_{\mathrm{res}}(H)$ formato dagli operatori A tali che $A(z^k H_+) = z^k H_+$ e $(A-1)(z^k H_+) \subseteq z^{k+1} H_+$ per ogni k ("matrici triangolari superiori").

Proposizione 10. Per ogni $S \in \mathscr{S}$ si ha che:
1) C_S è una sottovarietà chiusa dell'aperto U_S diffeomorfa a $\mathbb{C}^{|S|}$;
2) C_S coincide con l'orbita di H_S sotto l'azione di $\mathcal{N}_+$;
3) se $W \in U_S$ allora $S \leq S^W$;
4) la chiusura di C_S è l'unione $\bigcup_{S' \leq S} C_{S'}$;
5) C_S interseca $\Sigma_{S'}$ se e solo se $S \geq S'$, e C_S interseca Σ_S trasversalmente in H_S.

Per dimostrare questo teorema si procede in maniera analoga all'enunciato duale sugli strati; l'osservazione chiave è che C_S consiste dei grafici degli operatori $T\colon H_S \to H_S^\perp$ i cui elementi di matrice T_{pq} si annullano a meno che non sia $p > q$.

§7. Le coordinate di Plücker. In ciò che segue lavoriamo nella componente Gr di dimensione virtuale zero; nelle altre componenti valgono risultati analoghi sostituendo ovunque H_+ con $z^{-d}H_+$. Abbiamo visto che ad ogni sottospazio $W \in \mathrm{Gr}$ si può associare una base canonica; per uso successivo è però utile introdurre una classe più ampia di basi "ammissibili".

Definizione 6. Dato $W \in \mathrm{Gr}$ una successione $\{w_k\}_{k \geq 0}$ di elementi di W si dice una **base ammissibile** per W se:
1. l'applicazione lineare $w\colon H_+ \to H$ definita dalla posizione $z^k \mapsto w_k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ ha immagine W e la sua corestrizione ad essa è un isomorfismo continuo;
2. l'operatore $w_+ = \pi_+ w$ ha determinante.

Notiamo che per ogni $S \in \mathscr{S}_0$ tale che π_S è un isomorfismo le controimmagini di $\{z^s\}_{s \in S}$ determinano una base ammissibile per W, dato che $\pi_+(w_k) = z^k$ per k sufficientemente grande e quindi l'operatore $\pi_+ w - \mathrm{id}$ ha rango finito; in particolare quando $S = S_W$ abbiamo che la base canonica di W è ammissibile. Nel seguito, quando parleremo di una base ammissibile, ci riferiremo indifferentemente all'insieme $\{w_k\}_{k \geq 0}$ o all'applicazione lineare w; possiamo pensare a quest'ultima come alla matrice $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ le cui colonne sono le componenti dei vettori w_i. Nella decomposizione $H = H_+ \oplus H_-$ essa si scrive

$$w = \begin{pmatrix} w_+ \\ w_- \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc} w_{00} & w_{01} & \cdots \\ w_{10} & w_{11} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ \hline w_{-10} & w_{-11} & \cdots \\ w_{-20} & w_{-21} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{array}\right)$$

con $w_+ \in \mathcal{T}(H_+)$ per definizione e $w_-\colon H_+ \to H_-$ compatto.

Siano ora date due basi ammissibili w e w' per il medesimo spazio $W \in \mathrm{Gr}$. Se restringiamo entrambe le loro immagini a W possiamo considerare l'operatore $A\colon H_+ \to$

H_+ dato dalla composizione $w^{-1}w'$; si tratta dell'operatore che a z^k per $k \geq 0$ associa la controimmagine del vettore w'_k secondo w, e si ha allora che

$$w' = wA \quad \text{ovvero} \quad w'_i = \sum_{j \geq 0} w_j A_{ji}$$

Questo operatore ha determinante: infatti per ipotesi $w_+ - \mathrm{id}$ è di classe traccia e quindi lo è anche

$$(w_+ - \mathrm{id})A = w_+A - A = (w_+A - \mathrm{id}) - (A - \mathrm{id})$$

Ma $w_+A = w'_+$ che ha determinante per ipotesi, quindi $A - \mathrm{id}$ è di classe traccia, come volevasi. Se ne conclude che gli operatori che realizzano il passaggio tra due basi ammissibili hanno determinante; se denotiamo con $\mathcal{P}$ l'insieme di tutte le basi ammissibili per W al variare di $W \in \mathrm{Gr}$ otteniamo allora un fibrato principale su Gr di gruppo strutturale $\mathcal{T}(H_+)$. (La topologia è quella indotta dalla norma operatoriale per w_- e dalla norma della traccia su $w_+ - \mathrm{id}$.)

Sia ora w una base ammissibile per W e $S \in \mathscr{S}_0$ qualunque; allora π_S differisce da π_+ per un operatore di rango finito F (concretamente si tratta di $a - \mathrm{id}$, dove $a \colon H_+ \to H_S$ è il blocco in alto a sinistra della matrice di permutazione da $\mathbb{N}$ a S); ne segue che

$$\pi_S w - \mathrm{id} = (\pi_+ + F)w - \mathrm{id} = (\pi_+ w - \mathrm{id}) + Fw$$

che è di classe traccia; allora $\pi_S w$ ha determinante. Ha dunque senso la seguente:

Definizione 7. Sia $W \in \mathrm{Gr}$ e w una sua base ammissibile. Le **coordinate di Plücker di W rispetto alla base** w sono gli elementi dell'insieme (numerabile) di complessi definito da

$$\Pi_S(w) := \det(\pi_S w) \tag{15}$$

al variare di $S \in \mathscr{S}_0$.

In altre parole $\Pi_S(w)$ non è altro che il determinante della proiezione $W \to H_S$ calcolato rispetto alle basi (ammissibili) $\{w_j\}$ per W e $\{z^s | s \in S\}$ per H_S. Esplicitamente, se $w_j = \sum w_{ij} z^i$ allora

$$\Pi_S(w) = \det(w_{ij})_{i \in S,\, j \in \mathbb{N}}$$

Se w' è un'altra base ammissibile per W e A è la matrice di passaggio da w' a w allora

$$\Pi_S(w') = \det(\pi_S wA) = \det(\pi_S w) \det A = \Pi_S(w) \det A$$

e ne segue che $\{\Pi_S\}_{S \in \mathscr{S}_0}$, viste come coordinate *proiettive*, dipendono solo da W. Si noti che $\Pi_S(w) \neq 0$ se e solo se W è trasverso a $H_S^\perp$; in particolare la proposizione 5 ci dice che esiste un unico S di peso minimo tale che $\Pi_S(w) \neq 0$.

Possiamo rendere ancora più concreta la definizione (15) notando che w si può sempre scegliere in modo tale che sia $w_+ = \mathrm{id} + F$ con F di rango finito, e in tal caso le coordinate di Plücker si riducono a determinanti di matrici *finite*. Ad esempio se W è trasverso si può scegliere w tale che $w_+ = \mathrm{id}$, e in tal caso posto $A := S \setminus \mathbb{N}$ e $B := \mathbb{N} \setminus S$ risulta

$$\Pi_S(w) = \det(w_{ij})_{i \in A, j \in B}$$

Dimostriamo ora che le coordinate di Plücker formano una successione di numeri complessi a quadrato integrabile. Più precisamente sussiste la seguente:

Proposizione 11. Le coordinate di Plücker definiscono un embedding olomorfo $\Pi\colon \mathrm{Gr} \to \mathbb{P}(\mathcal{H})$, dove $\mathcal{H} = \ell^2(\mathscr{S}_0)$.

Dimostrazione. Anzitutto dimostriamo che le coordinate di Plücker sono una successione in $\ell^2(\mathscr{S}_0)$. È sufficiente far vedere che per una qualunque base ammissibile w la serie

$$\sum_{S \in \mathscr{S}_0} |\Pi_S(w)|^2$$

converge. Affermiamo che tale serie coincide con $\det(w^* w)$; questo operatore ha determinante perchè

$$w^* w = w_+^* w_+ + w_-^* w_-$$

e questo ha determinante perchè $w_+ \in \mathcal{T}(H_+)$ e w_- è compatto. Ora, per continuità basta procedere per $W \in \mathrm{Gr}_0$. Assumiamo dunque che $w_+ - \mathrm{id}$ e w_- siano matrici di rango finito. Allora la tesi si scrive come segue: date due matrici P e Q rispettivamente di tipo $n \times m$ e $m \times n$ (con $n \leq m$), risulta

$$\det PQ = \sum_S \det P_S \det Q_S$$

dove S corre sui sottoinsiemi di n elementi di $\{1, \ldots, m\}$ e P_S e Q_S sono le corrispondenti sottomatrici quadrate $n \times n$ di P e Q. Questo segue subito dalla funtorialità della potenza esterna n-esima.

Dunque $\{\Pi_S(w)\}_{S \in \mathscr{S}_0} \in \mathcal{H} := \ell^2(\mathscr{S}_0)$; resta da dimostrare che l'applicazione Π indotta su Gr è un embedding. Che passi al quoziente $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ è già stato osservato. Consideriamo dapprima il caso $W \in U_{\mathbb{N}}$, e sia $K\colon H_+ \to H_-$ il corrispondente operatore; allora la base canonica è data da

$$w_q = z^q + \sum_{p<0} K_{pq} z^p$$

Se ora definiamo $A := S \setminus \mathbb{N}$ e $B := \mathbb{N} \setminus S$ (insiemi finiti di uguale cardinalità) abbiamo che $\Pi_S(w)$ coincide con il determinante della sottomatrice finita di K_{pq} formata dalle righe A e dalle colonne B; in particolare ciascun elemento K_{pq} figura tra le coordinate di Plücker. Ne segue che Π è un embedding dell'aperto $U_{\mathbb{N}}$ in $\mathbb{P}(\mathcal{H})$. Nelle altre carte locali si procede nello stesso modo. $\square$

Vari sottospazi introdotti in precedenza ammettono una descrizione molto semplice in termini di coordinate di Plücker:

- $W \in U_S$ se e solo se $\Pi_S(W) \neq 0$;
- $W \in \Sigma_S$ se e solo se $\Pi_S(W) \neq 0$ e $\Pi_{S'}(W) = 0$ per ogni $S' < S$;
- $W \in C_S$ se e solo se $\Pi_S(W) \neq 0$ e $\Pi_{S'}(W) = 0$ a meno che non sia $S' \leq S$;
- $W \in \mathrm{Gr}_0$ se e solo se $\Pi_S(W) \neq 0$ eccetto che per un insieme finito di S.

§8. Trasformazioni di scala. Il gruppo $U(1)$ agisce su S^1 per rotazione e quindi agisce su H: esplicitamente, a $\lambda \in U(1)$ si associa l'operatore $R_\lambda \colon H \to H$ dato da

$$R_\lambda(f) := z \mapsto f(\lambda^{-1}.z) \quad \text{per ogni } f \in H$$

Tali operatori preservano la polarizzazione $H_+ \oplus H_-$, quindi l'azione in esame si solleva a $\overline{\mathrm{Gr}}$; denotiamo con $\hat{R}_\lambda$ il corrispondente operatore. È immediato verificare che i punti fissi di tale azione sono esattamente i sottospazi H_S per $S \in \mathscr{S}$.

L'azione $U(1) \times \overline{\mathrm{Gr}} \to \overline{\mathrm{Gr}}$ è continua ma non differenziabile: nella carta U_S l'azione di $\hat{R}_\lambda$ su $T \colon H_S \to H_S^\perp$ moltiplica l'elemento di matrice T_{pq} per λ^{q-p}.

Proposizione 12. L'orbita di $W \in \overline{\mathrm{Gr}}$ è liscia (cioè la mappa $\lambda \mapsto \hat{R}_\lambda(W)$ è liscia) se e solo se $W \in \overline{\mathrm{Gr}}_\infty$; è reale analitica se e solo se $W \in \overline{\mathrm{Gr}}_\omega$.

In effetti $U(1)$ agisce in maniera liscia sulla varietà $\overline{\mathrm{Gr}}_\infty$ con la topologia C^∞.

Quando $|\lambda| \neq 1$, l'operatore R_λ non è limitato; tuttavia nel caso $|\lambda| < 1$ è ancora possibile sollevare l'azione a $\overline{\mathrm{Gr}}$. Infatti il dominio di R_λ contiene il sottospazio H^{alg} formato dalle funzioni di ordine finito in H, quindi per ogni $W \in \overline{\mathrm{Gr}}$ possiamo definire $\hat{R}_\lambda(W)$ come la chiusura del sottospazio $R_\lambda(W^{\mathrm{alg}})$. Occorre ovviamente verificare che tale chiusura sta ancora in $\overline{\mathrm{Gr}}$; ma per ogni $W \in \overline{\mathrm{Gr}}$ sappiamo che esiste $S \in \mathscr{S}$ tale che W è trasverso a $H_S^\perp$, allora $R_\lambda(W)$ lo è a sua volta e quindi coincide il grafico di un operatore compatto, cioè appartiene a $\overline{\mathrm{Gr}}$.

Resta così definita su $\overline{\mathrm{Gr}}$ una azione del semigruppo dei numeri complessi non nulli di modulo minore o uguale a 1, che denotiamo $\mathbb{C}^*_{\leq 1}$; il corrispondente semigruppo di operatori $\hat{R}_\lambda$ si dirà il *semigruppo delle trasfomazioni di scala* di $\overline{\mathrm{Gr}}$. Si noti che l'applicazione $(\lambda, W) \mapsto R_\lambda(W)$ è funzione continua sia di λ che di W.

La stratificazione di $\overline{\mathrm{Gr}}$ costruita in precedenza è in relazione con le trasformazioni di scala.

Proposizione 13. 1) Σ_S consiste esattamente dei punti $W \in \overline{\mathrm{Gr}}$ tali che $\hat{R}_\lambda(W) \to H_S$ per $\lambda \to 0$.
2) C_S consiste esattamente dei punti $W \in \overline{\mathrm{Gr}}_0$ tali che $\hat{R}_\lambda(W) \to H_S$ per $\lambda \to \infty$.

Questo segue subito dal risultato successivo.

Proposizione 14. L'embedding di Plucker è equivariante rispetto a $\mathbb{C}^*_{\leq 1}$, dove R_λ agisce su $\ell^2(\mathscr{S})$ come

$$(R_\lambda(\xi))_S = \lambda^{|S|}\xi_S$$

In altri termini risulta

$$\Pi_S(\hat{R}_\lambda(W)) = cu^{|S|}\Pi_S(W)$$

con $c \neq 0$ che non dipende da S.

La dimostrazione di questo fatto si trova in [PS86, Prop. 7.6.4].

Notiamo infine che su Gr_0 gli operatori di scala hanno senso per ogni $\lambda \in \mathbb{C}^*$, la corrispondenza $\lambda \mapsto \hat{R}_\lambda$ definisce quindi un'azione olomorfa dell'intero gruppo $\mathbb{C}^*$.

§9. I gruppi $\Gamma_\pm$. Ogni applicazione continua $g\colon S^1 \to \mathbb{C}^*$ (cioè che non si annulla su S^1) definisce un operatore invertibile su H, che continueremo a denotare g, tramite la sua azione moltiplicativa:

$$f \mapsto gf \qquad \text{per ogni } f \in H$$

Denotiamo con Γ il gruppo di operatori su H così ottenuto.

Proposizione 15. Se $g\colon S^1 \to \mathbb{C}^*$ è di classe C^2 allora $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ è tale che b e c sono di classe traccia.

Dimostrazione. Scriviamo $g = \sum_k h_k z^k$; rispetto alla base canonica di H il generico elemento di matrice del corrispondente operatore è

$$\langle z^i, gz^j \rangle = \sum_k h_k \langle z^i, z^{k+j} \rangle = \sum_k h_k \delta_{k,i-j} = h_{i-j}$$

e dunque la matrice associata a g è

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} h_0 & h_{-1} & h_{-2} & \dots & h_1 & h_2 & h_3 & \dots \\ h_1 & h_0 & h_{-1} & \dots & h_2 & h_3 & h_4 & \dots \\ h_2 & h_1 & h_0 & \dots & h_3 & h_4 & h_5 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \hline h_{-1} & h_{-2} & h_{-3} & \dots & h_0 & h_1 & h_2 & \dots \\ h_{-2} & h_{-3} & h_{-4} & \dots & h_{-1} & h_0 & h_1 & \dots \\ h_{-3} & h_{-4} & h_{-5} & \dots & h_{-2} & h_{-1} & h_0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}\right) \tag{16}$$

Occorre dimostrare che i blocchi fuori diagonale sono di classe traccia. Notiamo che una matrice (α_{ij}) è sicuramente di classe traccia quando la serie $\sum |\alpha_{ij}|$ converge. Ma le matrici di cui sopra soddisfano tale condizione, infatti

$$\sum_{i \geq 0,\, j<0} |h_{i-j}| = \sum_{k>0} k\,|h_k|$$

Quest'ultima coincide con la serie di Fourier della derivata di g; siccome g è di classe C^2 la sua derivata è di classe C^1, e la serie di Fourier di una funzione di classe C^1 è assolutamente convergente. Analogamente

$$\sum_{i<0,\, j \geq 0} |h_{i-j}| = \sum_{k>0} k\,|h_{-k}|$$

e tale serie converge per le medesime ragioni. □

Consideriamo ora una qualunque applicazione $g\colon S^1 \to \mathbb{C}^*$ continua; allora esiste una successione $\{g_i\}_{i \in I}$ di applicazioni di classe C^2 che converge a g. Ma la topologia usuale su Γ corrisponde alla topologia della norma operatoriale su $\mathrm{GL}(H)$, quindi prendendo l'enunciato precedente e passando al limite si ottiene che i blocchi fuori diagonale di g

sono limiti di successioni di operatori di classe traccia, cioè sono operatori compatti; se ne conclude che Γ è un sottogruppo di $\overline{\mathrm{GL}_{\mathrm{res}}}(H)$, e quindi agisce sulla grassmanniana $\overline{\mathrm{Gr}}$.

Nel seguito faremo spesso riferimento a due particolari sottogruppi di Γ. Denotiamo con $\Gamma_+(R)$ il sottogruppo formato dalle applicazioni analitiche $g\colon S^1 \to \mathbb{C}^*$ che si estendono a funzioni olomorfe e prive di zeri sul disco $D_0(R)$ e tali che $g(0) = 1$; questo significa che il generico $g \in \Gamma_+(R)$ si scrive

$$g = 1 + \sum_{k\geq 1} h_k z^k \tag{17}$$

con la serie che ha raggio di convergenza maggiore di R. Denotiamo similmente con $\Gamma_-(R)$ il sottogruppo formato dalle applicazioni analitiche $g\colon S^1 \to \mathbb{C}^*$ che si estendono a funzioni olomorfe e prive di zeri sul disco $D_\infty(R)$ tali che $g(\infty) = 1$; questo significa che il generico $g \in \Gamma_-(R)$ si scrive

$$g = 1 + \sum_{k\geq 1} h_k z^{-k}$$

di nuovo, con la serie che converge nell'interno di un disco che contiene $D_\infty(R)$.

Proposizione 16. L'azione di Γ_- su $\overline{\mathrm{Gr}}$ è libera.

Dimostrazione. Supponiamo che esistano $W \in \overline{\mathrm{Gr}}$ e $g \in \Gamma_-$ tali che $gW = W$. Come già notato, $g = 1 + \sum_k h_k z^{-k}$; sia $w \in W$ un elemento di ordine minimo s_0. Allora $gw - w$ è ancora un elemento di W ed ha ordine strettamente minore di s_0, quindi deve essere nullo. Dunque $gw = w$, cioè $g = 1$, come volevasi. $\square$

Per uso successivo sarà utile notare esplicitamente la forma della matrice (16) associata a elementi di $\Gamma_\pm$. Prendiamo anzitutto $g \in \Gamma_+$; allora $h_{-k} = 0$ per ogni $k > 0$ e $h_0 = 1$, quindi

$$g = \left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 0 & \dots & h_1 & h_2 & h_3 & \dots \\
h_1 & 1 & 0 & \dots & h_2 & h_3 & h_4 & \dots \\
h_2 & h_1 & 1 & \dots & h_3 & h_4 & h_5 & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\
\hline
0 & 0 & 0 & \dots & 1 & h_1 & h_2 & \dots \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & h_1 & \dots \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}\right) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \tag{18}$$

dove $a\colon H_+ \to H_+$ e $d\colon H_- \to H_-$ sono operatori invertibili (avendo associate delle matrici unitriangolari), e quindi di Fredholm di indice zero; ne segue in particolare che $g \in \mathrm{GL}_{\mathrm{res}}$. Il suo inverso si scriverà

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} a^{-1} & -a^{-1}bd^{-1} \\ 0 & d^{-1} \end{pmatrix} \tag{19}$$

Analogamente si vede che anche il generico $g \in \Gamma_-$ appartiene a $\mathrm{GL}_{\mathrm{res}}$ e la sua matrice associata ha la forma

$$g = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$$

Dalla (17) segue che un elemento di Γ_+ è completamente determinato dalla successione di coefficienti $\boldsymbol{h} := \{h_k\}_{k\geq 1}$; altre descrizioni sono però possibili. Ad esempio, siccome Γ_+ contiene solo funzioni olomorfe su un dominio semplicemente connesso che non si annullano mai, si ha che per ogni $g \in \Gamma_+$ esiste f olomorfa tale che $g = \mathrm{e}^f$. Se ora espandiamo f in serie:

$$f(z) = \sum_{i\geq 1} t_i z^i$$

(si noti che la serie parte da $i = 1$ perchè deve essere $\mathrm{e}^{f(0)} = g(0) = 1$) abbiamo che ogni elemento $g \in \Gamma_+$ si scrive in maniera unica come

$$g(z) = \mathrm{e}^{\sum_{i\geq 1} t_i z^i}$$

per determinati coefficienti $\boldsymbol{t} := \{t_i\}_{i\geq 1}$. Ancora, possiamo definire altre successioni associate a g espandendo in serie g^{-1} in luogo di g (il motivo di una simile manovra diventerà chiaro più avanti): definiamo così le due ulteriori successioni $\boldsymbol{h}^-$ e $\boldsymbol{t}^-$ tramite la posizione

$$g^{-1} = 1 + \sum_{k\geq 1} h_k^- z^k = \mathrm{e}^{\sum_{i\geq 1} t_i^- z^i}$$

Sorge ora il problema di come passare da una famiglia di coefficienti all'altra. La questione è risolta notando che, se le h_k sono interpretate come funzioni simmetriche omogenee complete, allora le t_i sono legate alle funzioni simmetriche somma di potenze p_i; il legame preciso è dato dalla semplice uguaglianza

$$it_i = p_i$$

da cui la tabella

$$\begin{aligned} h_1 &= t_1 \\ 2!h_2 &= t_1^2 + 2t_2 \\ 3!h_3 &= t_1^3 + 6t_1t_2 + 6t_3 \\ 4!h_4 &= t_1^4 + 12t_1^2t_2 + 24t_1t_3 + 12t_2^2 + 24t_4 \\ &\vdots \end{aligned} \tag{20}$$

con relativa inversa

$$\begin{aligned} t_1 &= h_1 \\ 2t_2 &= 2h_2 - h_1^2 \\ 3t_3 &= 3h_3 - 3h_1h_2 + h_1^3 \\ 4t_4 &= 4h_4 - 4h_1h_3 - 2h_2^2 + 4h_1^2h_2 - h_1^4 \\ &\vdots \end{aligned} \tag{21}$$

Quanto ai coefficienti che coinvolgono g^{-1} in luogo di g basta notare che $\boldsymbol{t}^- = -\boldsymbol{t}$ (ovviamente) mentre la relazione tra $\boldsymbol{h}$ e $\boldsymbol{h}^-$ è quella usuale tra serie di potenze una inversa dell'altra:

$$h_k^- = -\sum_{j=1}^{k} h_j h_{k-j}^- \tag{22}$$

Esplicitamente

$$\begin{aligned} h_1^- &= -h_1 \\ h_2^- &= h_1^2 - h_2 \\ h_3^- &= -h_1^3 + 2h_1h_2 - h_3 \\ h_4^- &= h_1^4 - 3h_1^2h_2 + 2h_1h_3 + h_2^2 - h_4 \\ &\ \vdots \end{aligned}$$

Ne derivano le modifiche alle tabelle precedenti, ad esempio le (20) diventano

$$\begin{aligned} h_1^- &= -t_1 \\ 2!h_2^- &= t_1^2 - 2t_2 \\ 3!h_3^- &= -t_1^3 + 6t_1t_2 - 6t_3 \\ 4!h_4^- &= t_1^4 - 12t_1^2t_2 + 24t_1t_3 + 12t_2^2 - 24t_4 \\ &\ \vdots \end{aligned} \tag{23}$$

Per esempio se $g = 1 - z$ (che appartiene a $\Gamma_+(R)$ per ogni $R < 1$) allora risulta $\boldsymbol{h} = \{-1, 0, 0, \dots\}$, $\boldsymbol{h}^- = \{1, 1, 1, \dots\}$, $\boldsymbol{t} = \{-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \dots\}$ e $\boldsymbol{t}^- = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$.

§10. Relazione con i gruppi di loop. Ricordiamo che dato un gruppo topologico G, l'insieme $\mathcal{L}(G)$ formato dalle applicazioni continue $S^1 \to G$ con la topologia compatto-aperto è uno spazio topologico su cui può essere definita un'operazione binaria operando punto per punto con l'operazione di G; ovvero, per ogni coppia di applicazioni $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{L}(G)$ definiamo il prodotto $\gamma_1\gamma_2$ come l'applicazione

$$t \mapsto \gamma_1(t)\gamma_2(t)$$

dove a secondo membro figura il prodotto in G. Si ottiene così un gruppo topologico detto il **gruppo dei loop libero su** G; un gruppo di loop su G non è altro che un qualunque sottogruppo di $\mathcal{L}(G)$.

Una classe importante di gruppi di loop si ottiene come segue. Per ogni $\gamma \in \mathcal{L}(G)$ possiamo definire un'applicazione "di valutazione" che manda γ nel suo valore nell'identità $e \in G$; si ottiene così un morfismo $\mathcal{L}(G) \to G$. Il nucleo di tale morfismo è un gruppo di loop su G detto il **gruppo dei loop basati su** G e denotato $\Omega(G)$. Evidentemente si ha la sequenza esatta corta

$$1 \to \Omega(G) \to \mathcal{L}(G) \to G \to 1$$

Sia ora $H^{(n)} = L^2(S^1; \mathbb{C}^n)$ con la polarizzazione $H^{(n)} = H_+^{(n)} \oplus H_-^{(n)}$ definita in maniera analoga al caso $n = 1$:

$$H_+^{(n)} := \{\, f \in H^{(n)} \mid f(z) = \sum_{k \geq 0} f_k z^k \,\}$$
$$H_-^{(n)} := \{\, f \in H^{(n)} \mid f(z) = \sum_{k < 0} f_k z^k \,\}$$

dove però stavolta $f_k \in \mathbb{C}^n$. Di nuovo, $H_+^{(n)}$ contiene esattamente gli elementi di $H^{(n)}$ che possono essere estesi a funzioni olomorfe $D_0(R) \to \mathbb{C}^n$ e similmente $H_-^{(n)}$ contiene esattamente gli elementi di $H^{(n)}$ che possono essere estesi a funzioni olomorfe $D_\infty(R) \to \mathbb{C}^n$. O ancora, essi possono essere visti come gli autospazi relativi a ± 1 dell'operatore di rotazione infinitesima $J = -i\frac{d}{d\theta}$.

Il gruppo dei loop $\mathcal{L}(\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}))$ agisce su $H^{(n)}$ nella maniera ovvia e generalizzando i ragionamenti del §9 (risulta infatti $\Gamma = \mathcal{L}(\mathrm{GL}(1, \mathbb{C}))$) si vede che esso è un sottogruppo algebrico di $\overline{\mathrm{GL}}_{\mathrm{res}}(H^{(n)})$; ne segue che ogni loop a valori in $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ agisce su $\overline{\mathrm{Gr}}(H^{(n)})$.

Per ogni $\gamma \in \mathcal{L}(\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}))$ definiamo $W_\gamma := \gamma H_+^{(n)}$; allora si ha che

$$zW_\gamma \subseteq W_\gamma$$

dove z denota l'operazione di moltiplicazione per la funzione z su S^1; infatti la moltiplicazione per z commuta con l'azione di γ su $H^{(n)}$ e $zH_+^{(n)} \subseteq H_+^{(n)}$.

Definizione 8. $\overline{\mathrm{Gr}}^{(n)}(H^{(n)}) := \{\, W \in \overline{\mathrm{Gr}}(H^{(n)}) \mid zW \subseteq W \,\}$.

Allora $\overline{\mathrm{Gr}}^{(n)}(H^{(n)})$ è un sottospazio chiuso di $\overline{\mathrm{Gr}}(H^{(n)})$ e il gruppo $\mathcal{L}(\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}))$ agisce su di esso.

D'ora in poi identifichiamo $H^{(n)}$ con $H = H^{(1)}$ nel seguente modo: se $\{e_i\}_{i \in 1 \ldots n}$ è la base canonica di $\mathbb{C}^n$ (nel qual caso $\{\, e_i z^k \mid i = 1 \ldots n,\, k \in \mathbb{Z} \,\}$ è una base per $H^{(n)}$), definiamo l'isomorfismo $H^{(n)} \to H$ ponendo

$$e_i z^k \mapsto z^{nk+i-1}$$

ovvero $e_1 \mapsto 1 \ldots e_n \mapsto z^{n-1}$, $e_1 z \mapsto z^n \ldots e_n z \mapsto z^{2n-1}$, $e_2 z \mapsto z^{2n}$, e così via. Se si preferisce una descrizione più invariante, data una funzione a valori vettoriali $f = (f_1, \ldots, f_n)$ associamo ad essa la funzione a valori scalari $\hat{f}$ definita da

$$z \mapsto f_1(z^n) + z f_2(z^n) + \cdots + z^{n-1} f_n(z^n)$$

e viceversa data $\hat{f} \in H$ possiamo ricostruire le componenti di f tramite la formula

$$f_{i+1} = z \mapsto \frac{1}{n} \sum_{\{\zeta \mid \zeta^n = z\}} \zeta^{-i} \hat{f}(\zeta)$$

L'isomorfismo appena definito è un'isometria, manda funzioni continue in funzioni continue e più in generale preserva tutte le proprietà ragionevoli (differenziabilità, analiticità, polinomialità, razionalità, ecc) di cui può godere una funzione.

Chiaramente la moltiplicazione per z su $H^{(n)}$ corrisponde alla moltiplicazione per z^n su H (e $H_+^{(n)}$ corrisponde a H_+); quindi nel seguito possiamo identificare $\overline{\mathrm{Gr}}^{(n)}(H^{(n)})$ con il sottospazio di $\overline{\mathrm{Gr}}(H)$ definito da

$$\overline{\mathrm{Gr}}^{(n)}(H) := \{\, W \in \overline{\mathrm{Gr}}(H) \mid z^n W \subseteq W \,\}$$

Notiamo che $\overline{\mathrm{Gr}}^{(n)}(H)$ è preservato dall'azione del gruppo Γ e da quella del semigruppo delle trasformazioni di scala.

Nel seguito parleremo di "loop analitici" (razionali, etc.) per intendere dei loop γ tali che ciascun elemento di matrice di γ è una funzione analitica (razionale, etc.) di z priva di poli su S^1. I sottospazi formati da loop razionali o polinomi di Laurent possono essere caratterizzati come segue.

Proposizione 17. Sia dato $W \in \overline{\mathrm{Gr}}^{(n)}$. Sono fatti equivalenti:

1. $W = W_\gamma$ per qualche loop razionale γ;
2. esistono polinomi p e q tali che $pH_+ \subseteq W \subseteq q^{-1}H_+$;
3. W è commensurabile con H_+.

Denotiamo[4] $\overline{\mathrm{Gr}}_{\mathrm{rk1}}^{(n)}$ l'insieme dei sottospazi di $\overline{\mathrm{Gr}}^{(n)}$ che soddisfano le condizioni precedenti. Da notare che si può assumere che le radici di p e q giacciano tutte nella regione $|z| < 1$, dato che $z - c$ è un operatore invertibile su H_+ se $|c| > 1$.

Denotiamo inoltre $\overline{\mathrm{Gr}}_{\mathrm{rk1}}$ il sottospazio di $\overline{\mathrm{Gr}}$ formato dai W che soddisfano la condizione (2); si noti che se $W \in \overline{\mathrm{Gr}}$ non appartiene a nessun $\overline{\mathrm{Gr}}^{(n)}$ allora la condizione (3) non implica la (2): per esempio il nucleo dell'applicazione lineare $F\colon H_+ \to \mathbb{C}$ definita da

$$f \mapsto \operatorname*{res}_{z=0}(\mathrm{e}^{\frac{1}{z}} f \mathrm{d}z)$$

è un sottospazio lineare di H_+ di codimensione uno (infatti è determinato dalla singola condizione $\sum_{k\geq 0} \frac{1}{(k+1)!} f_k = 0$ sui coefficienti di Fourier di f) ma è evidente che non esiste alcun polinomio p tale che $pH_+ \subseteq W$.

Proposizione 18. Sia dato $W \in \overline{\mathrm{Gr}}^{(n)}$. Sono fatti equivalenti:

1. $W = W_\gamma$ per qualche loop polinomio di Laurent γ;
2. $W \in \overline{\mathrm{Gr}}_0$.

Indicheremo con $\overline{\mathrm{Gr}}_0^{(n)}$ l'insieme dei sottospazi di $\overline{\mathrm{Gr}}^{(n)}$ siffatti; chiaramente $\overline{\mathrm{Gr}}_0^{(n)} = \overline{\mathrm{Gr}}^{(n)} \cap \overline{\mathrm{Gr}}_0$ (definizione 5) e $\overline{\mathrm{Gr}}_0 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{\mathrm{Gr}}_0^{(n)}$.

Notiamo che tutte le sotto-grassmanniane introdotte sono invarianti sotto il semigruppo delle trasformazioni di scala e sotto l'azione di Γ_+ ($\overline{\mathrm{Gr}}_0$ e $\overline{\mathrm{Gr}}_{\mathrm{rk1}}$ sono invarianti sotto Γ_+ perchè $gH_+ = H_+$ per ogni $g \in \Gamma_+$).

[4] Questa sottograssmanniana è denotata Gr_1 in [SW85], sfortunatamente tale notazione è in conflitto con quella per le "grassmanniane a un punto" che introdurremo più avanti.

Infine, si noti che H_S appartiene a $\overline{\mathrm{Gr}}^{(n)}$ se e solo se $S+n \subseteq S$; per tali S definiamo $C_S^{(n)} := C_S \cap \overline{\mathrm{Gr}}^{(n)}$. Allora i $C_S^{(n)}$ formano una decomposizione in celle di $\overline{\mathrm{Gr}}_0^{(n)}$, e la cella $C_S^{(n)}$ ha dimensione

$$\sum_i (i - s_i - \operatorname{vcard} S)$$

dove la somma è presa sugli n interi i tali che $s_i \notin S+n$.

2 La gerarchia KP

§1. L'algebra degli operatori pseudo-differenziali. Sia $\mathcal{A}$ un'*algebra differenziale*, ovvero un'algebra (associativa e unitaria ma non necessariamente commutativa) su un campo $\mathbb{K}$ su cui sia definito un operatore di derivazione D (ovvero un operatore $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$ tale che $D(fg) = D(f)g + fD(g)$). Alcuni esempi basilari sono:

- l'anello delle funzioni lisce (o analitiche, o razionali, o polinomiali) in (almeno) una variabile x, con $D = \frac{\partial}{\partial x}$;
- l'anello delle serie di potenze (o di Laurent) formali in (almeno) una variabile x, di nuovo con $D = \frac{\partial}{\partial x}$;
- l'anello dei *polinomi differenziali* in n indeterminate $\{u_1, \ldots, u_n\}$ (a coefficienti in un campo o in un'algebra differenziale come le precedenti); esso coincide con l'anello dei polinomi "standard" in una famiglia numerabile di indeterminate $\{u_i^{(j)}\}_{1 \le i \le n,\, j \ge 0}$ in cui D è definito tramite la posizione $u_i^{(j)} \mapsto u_i^{(j+1)}$. Più in generale, nel seguito sarà naturale considerare anche l'anello dei polinomi differenziali in un'*infinità numerabile* di indeterminate $\{u_i\}_{i \ge 1}$;
- l'anello $\mathrm{Mat}_n(A)$ formato dalle matrici $n \times n$ a elementi in un anello differenziale (A, D) del tipo descritto in precedenza; qui l'operatore di derivazione è l'estensione di D da A a $\mathrm{Mat}_n(A)$ definita nella maniera ovvia (elemento per elemento).

Un elemento $c \in \mathcal{A}$ si dice **costante** se $D(a) = 0$. L'insieme di tutte le costanti si denota $\mathcal{A}^D$ ed è un sottoanello differenziale di $\mathcal{A}$; in genere opereremo sotto l'assunto che sia $\mathcal{A}^D = \mathbb{K}$.

Lo **spazio delle primitive** associato a $\mathcal{A}$ è il quoziente di spazi lineari

$$\tilde{\mathcal{A}} := \mathcal{A}/\operatorname{im} D$$

ovvero l'insieme delle classi di equivalenza di elementi di $\mathcal{A}$ modulo derivate. La proiezione canonica $\mathcal{A} \to \tilde{\mathcal{A}}$ si dice l'**integrale formale** su $\mathcal{A}$ e si denota $f \mapsto \int f$. Per costruzione risulta $\int D(f) = 0$ per ogni $f \in \mathcal{A}$, inoltre dalla regola di Leibniz per D segue subito la "formula di integrazione per parti"

$$\int fD(g) = -\int D(f)g \qquad \text{per ogni } f, g \in \mathcal{A}$$

L'**algebra degli operatori pseudo-differenziali a coefficienti in** $\mathcal{A}$, denotata Ψ, è l'algebra degli operatori $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$ generata da:

- gli elementi di $\mathcal{A}$, visti come operatori moltiplicativi (preso $f \in \mathcal{A}$, il corrispondente $f \in \Psi$ è l'operatore definito da $g \mapsto fg$ per ogni $g \in \mathcal{A}$);
- l'operatore di derivazione D;
- un *inverso formale* di D, ovvero un operatore D^{-1} su cui si impone la relazione $DD^{-1} = D^{-1}D = 1$.

Come spazio lineare Ψ coincide con lo spazio delle serie di Laurent formali in D^{-1} a coefficienti in $\mathcal{A}$, classicamente denotato $\mathcal{A}((D^{-1}))$; tuttavia il prodotto tra elementi di

Ψ *non* è definito "alla Cauchy" (come usuale tra serie formali) bensì tramite la famiglia di relazioni

$$D^n f = \sum_{k\geq 0} \binom{n}{k} f^{(k)} D^{n-k} \tag{24}$$

al variare di $f \in \mathcal{A}$ e $n \in \mathbb{Z}$; qui $f^{(k)}$ è l'operatore associato alla k-esima derivata di f. Quando $n \geq 0$ questa non è altro che l'ordinaria regola di Leibniz ($D^n f = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} D^{n-k}$); quando $n < 0$ si ottiene invece una serie di potenze formale in D^{-1}, in particolare risulta[5]

$$D^{-1} f = \sum_{k\geq 0} (-1)^k f^{(k)} D^{-1-k} = f D^{-1} - f' D^{-2} + f'' D^{-3} + \dots \tag{25}$$

Con queste posizioni, Ψ si qualifica come un'algebra associativa e unitaria (non commutativa) su $\mathbb{K}$. Per definizione dato $Q \in \Psi$ esiste $i^* \in \mathbb{Z}$ tale che i coefficienti di D^i in Q sono nulli per ogni $i > i^*$; il minimo tra questi i^* si dice l'**ordine** di Q e si denota $\operatorname{ord} Q$. Allora un operatore pseudo-differenziale di ordine a si scrive

$$Q = \sum_{i\leq a} q_i D^i \tag{26}$$

con $q_i \in \mathcal{A}$, $q_a \neq 0$. Ne segue che sull'algebra Ψ resta definita una filtrazione canonica su $\mathbb{Z}$ data dalla famiglia di sottogruppi additivi $\Psi_k := \{\, Q \in \Psi \mid \operatorname{ord} Q \leq k \,\}$.

Definiamo gli operatori di proiezione

$$Q \mapsto Q_- := \sum_{i\leq -1} q_i D^i \quad \text{ e } \quad Q \mapsto Q_+ := \sum_{0\leq i\leq a} q_i D^i$$

per ogni $Q \in \Psi$, e denotiamo rispettivamente con Ψ_+ e Ψ_- le relative immagini. A livello di spazi lineari risulta evidentemente

$$\Psi = \Psi_+ \oplus \Psi_-$$

Si noti che gli elementi di Ψ_+ non sono altro che i "genuini" operatori differenziali polinomiali a coefficienti in $\mathcal{A}$, mentre gli elementi di Ψ_- possono essere visti come "operatori integrali formali" (detti anche operatori di Volterra).

Sarà utile per il seguito ottenere un'espressione esplicita per il prodotto di due elementi di Ψ. Siano dunque dati $Q = \sum_{i\leq a} q_i D^i$ e $R = \sum_{j\leq b} r_j D^j$; applicando pedissequamente la (24) si ottiene

$$QR = \sum_{i\leq a} \sum_{j\leq b} q_i D^i r_j D^j = \sum_{i\leq a} \sum_{j\leq b} \sum_{k\geq 0} \binom{i}{k} q_i r_j^{(k)} D^{i+j-k}$$

Per mettere tale espressione in forma normale cominciamo con il sostituire gli indici i e j con un singolo indice $m := i + j$; possiamo allora porre $j = m - i$ mentre i correrà

[5] Ricordiamo che per $n < 0$ si definisce $\binom{n}{k} = (-1)^k \binom{-n+k-1}{k}$.

sull'intervallo (finito) di massimo a e minimo $m-b$:

$$= \sum_{k\geq 0} \sum_{m\leq a+b} \sum_{i=m-b}^{a} \binom{i}{k} q_i r_{m-i}^{(k)} D^{m-k}$$

A questo punto resta da esprimere la somma in termini dell'indice voluto $\ell := m-k$, a tale scopo conviene sostituire $k = m-\ell$; l'intervallo $k \geq 0$ diventa allora $m \geq \ell$, ovvero $\ell \leq m \leq a+b$. In definitiva si ottiene

$$QR = \sum_{\ell\leq a+b} \sum_{m=\ell}^{a+b} \sum_{i=m-b}^{a} \binom{i}{m-\ell} q_i r_{m-i}^{(m-\ell)} D^{\ell} \tag{27}$$

o più sinteticamente (ovvero indicando solo i coefficienti delle serie formali):

$$\{q_i\}_{i\leq a} \cdot \{r_j\}_{j\leq b} = \left\{ \sum_{m=\ell}^{a+b} \sum_{i=m-b}^{a} \binom{i}{m-\ell} q_i r_{m-i}^{(m-\ell)} \right\}_{\ell\leq a+b} \tag{28}$$

In particolare quando Q e R sono due monomi, diciamo $Q = qD^a$ e $R = rD^b$, si ottiene semplicemente

$$QR = \sum_{k\geq 0} \binom{a}{k} q r^{(k)} D^{a+b-k} = \sum_{\ell\leq a+b} \binom{a}{a+b-\ell} q r^{(a+b-\ell)} D^{\ell} \tag{29}$$

Si possono distinguere diversi casi:

- se $a \geq 0$ allora $\binom{a}{k} = 0$ per ogni $k > a$ e quindi il prodotto QR coinvolge una somma finita che va da D^{a+b} a D^b; in particolare se è anche $b \geq 0$ allora $QR \in \Psi_+$, il che ci dice che Ψ_+ è una sottoalgebra di Ψ;
- se $a < 0$ allora $\binom{a}{k} \neq 0$ per ogni $k \geq 0$ e quindi il prodotto QR è una serie di Laurent formale in D^{-1} che parte da D^{a+b}; in particolare se è anche $b < 0$ allora $QR \in \Psi_-$, il che ci dice che anche Ψ_- è una sottoalgebra di Ψ.

Per uso successivo sarà utile notare che la regola di moltiplicazione (27) è "omogenea" nel seguente senso: se attribuiamo a D peso 1, a ciascuna variabile q_i peso (differenziale) $r-i$ e a ciascuna variabile r_j peso (differenziale) $s-j$, allora Q risulta omogeneo di peso r e R omogeneo di peso s. Con tali posizioni ciascun addendo che figura nella (27) ha peso $(r-i)+(s-m+i+m-\ell)+\ell = r+s$, e quindi il prodotto QR è omogeneo di peso $r+s$.

Definizione 9. L'operatore lineare su Ψ definito sul generico monomio fD^n tramite la posizione

$$(fD^n)^* := (-1)^n D^n f$$

estesa poi per linearità all'intera algebra si dice l'**aggiunto formale** su Ψ.

Proposizione 19. L'aggiunto formale preserva le sottoalgebre $\Psi_\pm$ (ovvero $(\Psi_\pm)^* = \Psi_\pm$).

Questo segue subito dalla struttura delle relazioni di commutazione (24), e più precisamente dal fatto che mettendo in forma normale un prodotto del tipo $D^n f$ con $n \geq 0$ non vengono prodotti termini di ordine negativo, e similmente mettendo in forma normale un prodotto del tipo $D^{-n} f$ con $n > 0$ non vengono prodotti termini di ordine positivo. Ad esempio risulta

$$\begin{aligned}
&(fD)^* = -fD - f' \in \Psi_+ && (fD^{-1})^* = -fD^{-1} + f'D^{-2} - f''D^{-3} + \cdots \in \Psi_- \\
&(fD^2)^* = fD^2 + 2f'D + f'' \in \Psi_+ && (fD^{-2})^* = fD^{-2} - 2f'D^{-3} + 3f''D^{-4} + \cdots \in \Psi_-
\end{aligned}$$

e così via. Più in generale, per i coefficienti dell'aggiunto di un generico $Q \in \Psi$ si ha la seguente formula esplicita:

$$\begin{aligned}
Q^* = \sum_{i \leq a} (-1)^i D^i q_i &= \sum_{i \leq a} (-1)^i \sum_{k \geq 0} \binom{i}{k} q_i^{(k)} D^{i-k} \\
&= \sum_{\ell \leq a} \left(\sum_{k=0}^{a-\ell} (-1)^{\ell+k} \binom{\ell+k}{k} q_{\ell+k}^{(k)} \right) D^\ell
\end{aligned} \tag{30}$$

Proposizione 20. L'aggiunto formale è un'involuzione: $Q^{**} = Q$ per ogni $Q \in \Psi$.

Dimostrazione. Per linearità basta verificare la tesi sui monomi. Si ha

$$\begin{aligned}
(fD^n)^{**} &= (-1)^n (D^n f)^* = (-1)^n \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} (f^{(k)} D^{n-k})^* = \\
&= (-1)^n \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} D^{n-k} f^{(k)} = \sum_{k, \ell \geq 0} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n-k}{\ell} f^{(k+\ell)} D^{n-(k+\ell)}
\end{aligned}$$

Posto $p := k + \ell$ e notando che $\binom{n}{k}\binom{n-k}{\ell} = \binom{n}{p}\binom{p}{k}$ risulta

$$= \sum_{p \geq 0} \binom{n}{p} \left(\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} \right) f^{(p)} D^{n-p} = fD^n$$

perchè la somma tra parentesi fa zero tranne che per $p = 0$, nel qual caso vale 1. $\square$

Proposizione 21. L'aggiunto formale è un *antimorfismo* dell'algebra Ψ: $(QR)^* = R^* Q^*$.

Dimostrazione. Di nuovo, basta procedere per i prodotti di monomi. Sia dunque $Q = qD^a$ e $R = rD^b$; mettendo assieme la (29) e la (30) e ricordando che $(fg)^{(\ell)} = \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} f^{(k)} g^{(\ell-k)}$ si ottiene

$$(QR)^* = \sum_{p \leq a+b} \left(\sum_{k=0}^{a+b-p} (-1)^{p+k} \binom{p+k}{k} \binom{a}{a+b-p-k} \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} q^{(\ell)} r^{(a+b-p-\ell)} \right) D^p \tag{31}$$

D'altro canto

$$Q^* = (-1)^a \sum_{i \le a} \binom{a}{a-i} q^{(a-i)} D^i \quad \text{e} \quad R^* = (-1)^b \sum_{j \le b} \binom{b}{b-j} r^{(b-j)} D^j$$

e quindi, usando la (27):

$$R^* Q^* = (-1)^{a+b} \sum_{p \le a+b} \left(\sum_{m=p}^{a+b} \sum_{i=m-a}^{b} \binom{i}{m-p} \binom{b}{b-i} r^{(b-i)} \binom{a}{a-m+i} q^{(a+i-p)} \right) D^p \tag{32}$$

Affermiamo che i coefficienti di queste due serie coincidono tra loro. Per vederlo si sostituisca nella (31) l'indice k con l'indice $p+k$, allora il coefficiente di D^p si scrive

$$\sum_{k=p}^{a+b} \sum_{\ell=0}^{k-p} (-1)^k \binom{k}{k-p} \binom{a}{a+b-k} \binom{k-p}{\ell} q^{(\ell)} r^{(a+b-p-\ell)}$$

Ancora, si sostituisca l'indice ℓ con $i := \ell + p - a$: si ottiene

$$= \sum_{k=p}^{a+b} \sum_{i=p-a}^{k-a} (-1)^k \binom{k}{k-p} \binom{a}{a+b-k} \binom{k-p}{a+i-p} q^{(a+i-p)} r^{(b-i)}$$

che, con le ovvie variazioni negli estremi degli indici, coincide con il p-esimo coefficiente della serie (32). □

Come per tutte le algebre associative, Ψ possiede una struttura canonica di algebra di Lie se equipaggiata con il commutatore:

$$[Q, R] := QR - RQ \quad \text{per ogni } Q, R \in \Psi$$

e $\Psi_\pm$ risultano allora due sottoalgebre di Lie (che *non* commutano tra loro).

Definizione 10. Dato $Q \in \Psi$ il **residuo** di Q, denotato $\operatorname{res} Q$, è il coefficiente del termine in D^{-1} in Q.

Proposizione 22. $\operatorname{res} Q^* = -\operatorname{res} Q$.

Per vederlo basta prendere $\ell = -1$ nella (30) e ricordare che $\binom{n}{k} = 0$ se $n \ge 0$ e $n < k$:

$$\operatorname{res} Q^* = \sum_{k=0}^{a+1} (-1)^{k-1} \binom{k-1}{k} q_{k-1}^{(k)} = -q_{-1}$$

Definizione 11. L'applicazione $\operatorname{Tr}\colon \Psi \to \tilde{\mathcal{A}}$ definita da

$$Q \mapsto \int \operatorname{res} Q$$

si dice la **traccia di Adler**.

La traccia di Adler è evidentemente un'applicazione lineare, essendo composizione di due applicazioni lineari. Un'altra sua proprietà importante (che in un certo senso ne giustifica il nome) è la *ciclicità*; prima di vederla è utile osservare che:

Proposizione 23. Siano dati due monomi $Q = qD^a$ e $R = rD^b$ e supponiamo che a e b siano interi concordi; allora $\operatorname{res} QR = \operatorname{res} RQ = 0$.

Infatti se a e b sono entrambi positivi allora $QR \in \Psi_+$, quindi ha residuo zero; se $a < 0$ e $b < 0$ allora QR può essere al massimo di ordine -2, quindi nuovamente ha residuo nullo.

Proposizione 24. La traccia di Adler è ciclica: $\operatorname{Tr} QR = \operatorname{Tr} RQ$.

Dimostrazione. Come al solito è sufficiente procedere per i monomi: siano dunque $Q = qD^a$ e $R = rD^b$. Se a e b sono concordi la proposizione precedente ci dice che $\operatorname{Tr} QR = \operatorname{Tr} RQ = 0$, quindi la tesi è banalmente verificata. Supponiamo allora che a e b siano discordi, e per fissare le idee prendiamo $a \geq 0$ e $b < 0$. Posto $c := -b$, dalla (29) risulta

$$\operatorname{Tr} QR = \binom{a}{a-c+1} \int qr^{(a-c+1)}$$

D'altro canto, dalla medesima formula applicata stavolta al prodotto RQ si ha che

$$\operatorname{Tr} RQ = \binom{-c}{a-c+1} \int rq^{(a-c+1)} = (-1)^{a-c+1} \binom{a}{a-c+1} \int rq^{(a-c+1)}$$

e integrando per parti $a - c + 1$ volte

$$= \binom{a}{a-c+1} \int r^{(a-c+1)} q = \operatorname{Tr} QR$$

come volevasi. □

Notiamo altresì che per ogni coppia $Q, R \in \Psi$ risulta

$$\operatorname{Tr} Q_+ R = \operatorname{Tr} Q_+ R_+ + \operatorname{Tr} Q_+ R_- = \operatorname{Tr} Q_+ R_- \tag{33}$$

perchè il primo addendo è nullo. Per la medesima ragione si ha

$$\operatorname{Tr} Q R_- = \operatorname{Tr} Q_+ R_- + \operatorname{Tr} Q_- R_- = \operatorname{Tr} Q_+ R_- \tag{34}$$

da cui l'ulteriore uguaglianza

$$\operatorname{Tr} Q_+ R = \operatorname{Tr} Q R_- \tag{35}$$

La traccia di Adler ci permette di definire un funzionale sull'algebra Ψ a valori nello spazio delle primitive $\tilde{\mathcal{A}}$.

Definizione 12. Dati $Q, R \in \Psi$ il loro **pairing** è l'elemento di $\tilde{\mathcal{A}}$ definito da

$$\langle Q, R \rangle := \operatorname{Tr} QR = \int \operatorname{res} QR \tag{36}$$

Ne seguono subito le seguenti proprietà:

- *simmetria*: $\langle Q, R\rangle = \langle R, Q\rangle$ (dalla ciclicità della traccia);
- *isotropia* di $\Psi_\pm$: $\langle \Psi_+, \Psi_+\rangle = \langle \Psi_-, \Psi_-\rangle = 0$ (proposizione 23);
- *non degeneratezza*: da $\langle Q, R\rangle = 0$ per ogni $R \in \Psi$ segue $Q = 0$ (basta scrivere $R = R_+ + R_-$ e applicare il punto precedente);
- *invarianza* sotto l'azione aggiunta di Ψ su sè stessa: $\langle [P, Q], R\rangle = \langle P, [Q, R]\rangle$ (anche questo segue subito dalla ciclicità).

Notiamo che, rispetto al pairing sopra definito, Ψ_+ e Ψ_- sono spazi lineari duali. Più precisamente, sia $\{a_i D^i\}_{i\geq 0}$ una base per Ψ_+, allora

$$\langle a_i D^i, D^j b_j\rangle = \int \mathrm{res}(b_j a_i D^{i+j}) = \begin{cases} \int b_j a_i & \text{se } i+j=-1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Se ora scegliamo i b_j in modo tale che risulti $\int b_{-i-1} a_i = 1$ per ogni $i \in \mathbb{N}$ otteniamo che la base di Ψ_- data da $\{D^j b_j\}_{j<0}$ è la duale della base di Ψ_+ sopra esibita.

Con un ragionamento analogo si vede che il duale di Ψ_n si identifica con $\Psi/D^{-n-1}\Psi_-$ (i cui elementi sono in corrispondenza biunivoca con gli elementi di Ψ che non contengono potenze inferiori a D^{-n-1}), e similmente se denotiamo $\Psi_{+,n}$ il sottospazio degli operatori differenziali di ordine al più n abbiamo che il suo duale si identifica con $\Psi_-/D^{-n-1}\Psi_-$ (i cui elementi sono in corrispondenza biunivoca con gli elementi di Ψ_- che non contengono potenze inferiori a D^{-n-1}).

§2. Inversi e radici. L'utilità di lavorare in Ψ è data dall'esistenza di inversi e potenze razionali di un operatore. In tutto ciò che segue supponiamo di lavorare con $Q \in \Psi$ di ordine n tale che q_n è invertibile in $\mathcal{A}$ (e possiamo allora supporre $q_n = 1$).

Proposizione 25. Esiste ed è unico l'inverso di Q in Ψ, ed è della forma

$$Q^{-1} = \sum_{j \leq -n} r_j D^j$$

con $r_{-n} = 1$ e ciascun $r_{\ell-n}$ per $\ell < 0$ è un polinomio differenziale in $q_{\ell+n}, \ldots, q_{n-1}$.

Dimostrazione. Imponendo la condizione $QQ^{-1} = 1$ e usando la formula (28) si ottiene per $\ell = 0$ la condizione

$$\binom{n}{0} q_n r_{-n} = 1$$

da cui $r_{-n} = 1$, e per ogni $\ell < 0$ la condizione

$$\sum_{m=\ell}^{0} \sum_{i=m+n}^{n} \binom{i}{m-\ell} q_i r_{m-i}^{(m-\ell)} = 0$$

Ora, a primo membro l'indice $m - i$ corre da $\ell - n$ a n, e il termine $r_{\ell-n}$ compare esattamente una volta (per $m = \ell$ e $i = n$) non derivato (perchè in tal caso $m - \ell = 0$);

tutti gli altri addendi coinvolgono r_j con $\ell - n < j \leq -n$, derivati al più $-\ell$ volte. Ne segue che ognuna di queste equazioni può essere risolta ricorsivamente per $r_{\ell-n}$: esplicitamente

$$r_{\ell-n} = -\sum_{i=\ell+n}^{n-1} q_i r_{\ell-i} - \sum_{m=\ell+1}^{0} \sum_{i=m+n}^{n} \binom{i}{m-\ell} q_i r_{m-i}^{(m-\ell)}$$

Se ne conclude che ciascun r_j con $j < -n$ si esprime come polinomio differenziale nei coefficienti detti. □

Ad esempio risulta

$$r_{-n-1} = -q_{n-1}$$
$$r_{-n-2} = -q_{n-2} + q_{n-1}^2 + nq'_{n-1}$$

e così via.

Proposizione 26. Esiste ed è unico $R \in \Psi$ tale che $R^n = Q$, ed è della forma

$$R = \sum_{i \leq 1} r_i D^i \tag{37}$$

con $r_1 = 1$ e ciascun r_j per $j < 1$ è un polinomio differenziale in $q_{j+n-1}, \ldots, q_{n-1}$.

Stante questo fatto possiamo definire $Q^{\frac{k}{n}}$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$ semplicemente come R^k; evidentemente esso risulterà essere un'operatore di ordine k.

Dimostrazione. Preso R generico operatore di ordine 1 come da (37) si ha

$$R^n = \sum_{i_1 \leq 1} r_{i_1} D^{i_1} \cdots \sum_{i_n \leq 1} r_{i_n} D^{i_n} \tag{38}$$

Imponiamo ora la condizione $R^n = Q$. L'unico termine di ordine n nella (38) si ottiene prendendo $i_1 = \cdots = i_n = 1$ e ignorando tutti i commutatori, il suo coefficiente è quindi r_1^n; essendo $q_n = 1$ se ne conclude che deve essere $r_1 = 1$. La nostra condizione si riscrive quindi

$$(D + \sum_{i_1 \leq 0} r_{i_1} D^{i_1}) \cdot \cdots \cdot (D + \sum_{i_n \leq 0} r_{i_n} D^{i_n}) = Q \tag{39}$$

Definiamo una famiglia (infinita) di polinomi differenziali $\{C_\ell^{(n)}\}_{\ell<n}$ nelle incognite $\{r_i\}_{i\leq 0}$ imponendo che risulti

$$R^n = D^n + \sum_{\ell<n} C_\ell^{(n)} D^\ell$$

Tali polinomi si possono ricavare espandendo e mettendo in forma normale i prodotti che figurano a primo membro della (39) e raggruppando i termini del medesimo ordine. Ora, in virtù dell'omogeneità del prodotto di Ψ, ed essendo R (con i pesi definiti nella maniera solita: r_i ha peso $1-i$) omogeneo di peso 1, risulta che R^n è omogeneo di peso n, e quindi ciascun $C_\ell^{(n)}$ deve essere un polinomio differenziale omogeneo di peso $n-\ell$, e quindi può coinvolgere al più le incognite r_i per $0 \geq i \geq \ell-(n-1)$. Consideriamo in particolare la dipendenza da $r_{\ell-n+1}$; essa discende esclusivamente dai prodotti della (39) in cui si prendono come fattori $n-1$ volte D e una sola volta la somma $\sum_{i\leq 0} r_i D^i$, in tutti gli n ordini possibili:

$$\sum_{j=0}^{n-1} D^j \sum_{i\leq 0} r_i D^i D^{n-1-j} = \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i\leq 0}\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k} r_i^{(k)} D^{n-1-k+i} \tag{40}$$

Questo perchè tali termini sono gli unici che contengono un numero sufficiente $(n-1)$ di derivazioni per compensare il $D^{\ell-n+1}$ di cui $r_{\ell-n+1}$ è coefficiente. Se ora nella (40) prendiamo $i=\ell-n+1$ e imponiamo che sia $n-1-k+(\ell-n+1)=\ell$ vediamo che deve essere $k=0$, quindi l'unico termine rilevante è

$$\sum_{j=0}^{n-1} r_{\ell-n+1} D^\ell = n r_{\ell-n+1} D^\ell$$

In definitiva possiamo scrivere

$$C_\ell^{(n)} = n r_{\ell-n+1} + \tilde{C}_\ell^{(n)}(r_0,\ldots,r_{\ell-n+2})$$

con $\tilde{C}_\ell^{(n)}$ polinomio differenziale nelle variabili indicate. Ora, la condizione (39) si scrive

$$D^n + \sum_{\ell<n}(n r_{\ell-n+1} + \tilde{C}_\ell^{(n)}) D^\ell = D^n + \sum_{\ell<n} q_\ell D^\ell$$

e quindi determina la famiglia numerabile di equazioni

$$n r_{\ell-n+1} + \tilde{C}_\ell^{(n)}(r_0,\ldots,r_{\ell-n+2}) = q_\ell$$

che si possono risolvere ricorsivamente per ciascun $\ell<n$ e quindi determinano univocamente R, come richiesto. $\square$

Ad esempio per $n=2$ si ha

$$r_0 = \frac{1}{2} q_1$$
$$r_{-1} = \frac{1}{2}(q_0 - \frac{1}{2} q_1' - \frac{1}{4} q_1^2)$$

e così via. Notiamo che, rispetto al caso degli inversi, qui non è possibile ottenere banalmente una formula esplicita per i coefficienti di R in funzione di quelli di Q.

§3. La gerarchia KP. D'ora in avanti assumiamo che gli elementi di $\mathcal{A}$ siano funzioni (lisce) di un'*infinità numerabile di variabili reali* $\boldsymbol{t} = \{t_i\}_{i\geq 1}$, che fungeranno da parametri di evoluzione della gerarchia KP; come vedremo nel seguito, la variabile x di cui D è l'operatore di derivazione si potrà identificare con t_1.

Consideriamo il *gruppo formale* G associato all'algebra di Lie Ψ_-, ovvero il gruppo formato dalle serie di potenze formali

$$\exp A = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} A^k$$

al variare di $A \in \Psi_-$. Chiaramente il generico $\phi \in G$ si scriverà come

$$\phi = 1 + \sum_{k\geq 1} a_k D^{-k} \tag{41}$$

per opportuni coefficienti $a_k \in \mathcal{A}$; in altri termini, esiste $P \in \Psi_-$ tale che $\phi = 1 + P$. Questo implica che G sia effettivamente un gruppo, e anzi ci permette addirittura di scrivere una formula esplicita per il prodotto di due suoi elementi: dati $\phi_1 = 1 + A$ e $\phi_2 = 1 + B$, con $A = \sum_i a_i D^{-i}$ e $B = \sum_j b_j D^{-j}$, risulta

$$\phi_1\phi_2 = 1 + A + B + AB =$$

$$= 1 + \sum_i a_i D^{-i} + \sum_j b_j D^{-j} + \sum_{i,j} a_i \sum_{k\geq 0} (-1)^k \binom{i+k-1}{k} b_j^{(k)} D^{-i-k-j}$$

che si può riscrivere come

$$= 1 + \sum_\ell (a_\ell + b_\ell + H_\ell(a,b)) D^{-\ell} \tag{42}$$

dove si è definita la famiglia di polinomi differenziali

$$H_\ell(a,b) := \sum_{\substack{i,j\geq 1\\ i+j\leq \ell}} (-1)^{\ell-i-j} \binom{\ell-j-1}{\ell-j-i} a_i b_j^{(\ell-i-j)} \tag{43}$$

Volendo, tali polinomi si possono riscrivere come segue:

$$H_\ell = \sum_{i=1}^{\ell-1} \sum_{j=1}^{\ell-i} (-1)^{\ell-i-j} \binom{\ell-j-1}{\ell-j-i} a_i b_j^{(\ell-i-j)} = \sum_{i=1}^{\ell-1} \sum_{k=0}^{\ell-i-1} (-1)^k \binom{i+k-1}{k} a_i b_{\ell-i-k}^{(k)}$$

Si noti che, a indice ℓ fissato, il polinomio $H_\ell(a,b)$ dipende esclusivamente dai coefficienti $\{a_1, \ldots, a_{\ell-1}\}$, $\{b_1, \ldots, b_{\ell-1}\}$ e dalle derivate di questi ultimi di ordine al più $\ell - 2$; ad esempio

$$\begin{aligned} H_1(a,b) &= 0\\ H_2(a,b) &= a_1 b_1\\ H_3(a,b) &= a_2 b_1 - a_1 b_1' + a_1 b_2\\ H_4(a,b) &= a_3 b_1 + a_2 b_2 - 2a_2 b_1' + a_1 b_3 - a_1 b_2' + a_1 b_1'' \end{aligned} \tag{44}$$

e così via. Inoltre questi polinomi sono "omogenei" nel seguente senso: se ai coefficienti a_i e b_i attribuiamo peso i e ad ogni operazione di derivazione su uno di tali coefficienti attribuiamo peso 1, allora il polinomio H_ℓ risulta avere peso ℓ (questa è una conseguenza immediata dell'omogeneità delle relazioni (24)).

In particolare ci chiediamo com'è fatto l'inverso di un elemento $\phi = 1 + A$. Posto $\phi^{-1} = 1 + B$ e imponendo la relazione $\phi\phi^{-1} = 1$, dalla (42) si ottiene la famiglia numerabile di uguaglianze

$$b_\ell = -a_\ell - H_\ell(a, b)$$

e siccome $H_\ell(a, b)$ dipende solo da $\{b_1, \ldots, b_{\ell-1}\}$ i coefficienti di B possono essere calcolati ricorsivamente. Usando i polinomi esibiti nella (44) vediamo che risulta ad esempio

$$\begin{aligned}
b_1 &= -a_1 \\
b_2 &= -a_2 + a_1^2 \\
b_3 &= -a_3 - a_1 a_1' + 2a_1 a_2 - a_1^3 \\
b_4 &= -a_4 + 2a_1 a_3 - 3a_1^2 a_2 + a_1^4 + a_1 a_1'' + 3a_1^2 a_1' - a_1 a_2' + a_2^2 - 2a_1' a_2
\end{aligned}$$

e così via. In definitiva

$$\phi^{-1} = 1 - \sum_{k \geq 1} (a_k + P_k(a)) D^{-k} \tag{45}$$

dove ciascun $P_k(a)$ è un polinomio omogeneo di grado k (secondo il grading stabilito in precedenza) che dipende dai coefficienti $\{a_1, \ldots, a_{k-1}\}$ e loro derivate al più di ordine $k - 2$; dallo specchietto precedente si legge $P_1(a) = 0$, $P_2(a) = -a_1^2$, $P_3(a) = a_1 a_1' - 2a_1 a_2 + a_1^3$, e così via.

Possiamo ora introdurre la famiglia di flussi KP su G.

Definizione 13. Per ogni $k \geq 1$ il **k-esimo flusso KP su G** è definito dall'equazione di evoluzione

$$\partial_k \phi = -(\phi D^k \phi^{-1})_- \phi \tag{46}$$

dove $\partial_k := \frac{\partial}{\partial t_k}$.

La (46) è anche detta l'**equazione di Sato** del k-esimo flusso KP. Queste equazioni vanno interpretate come la definizione di una famiglia infinita di flussi sullo spazio delle funzioni $\{a_1, a_2, \ldots\}$ che fungono da coefficienti di ϕ.

In pratica è più comodo scrivere questi flussi in una maniera un po' diversa. Cominciamo con l'osservare che per ogni $\phi \in G$ possiamo definire l'operatore pseudo-differenziale

$$Q := \phi D \phi^{-1} \tag{47}$$

Usando le espressioni generali per ϕ e ϕ^{-1} ottenute in precedenza si verifica immediatamente che Q è monico di ordine 1 e non ha termine di ordine zero:

$$Q = D + \sum_{i \geq 1} q_i D^{-i} \tag{48}$$

Si noti altresì che $Q^2 = \phi D \phi^{-1} \phi D \phi^{-1} = \phi D^2 \phi^{-1}$ e più in generale

$$Q^k = \phi D^k \phi^{-1}$$

che sarà un operatore monico di ordine k privo del termine di ordine $k-1$.

Viceversa, dato Q è possibile risalire a ϕ:

Proposizione 27. Sia Q un operatore pseudo-differenziale della forma (48); allora esiste $\phi \in G$ tale che $Q = \phi D \phi^{-1}$, ed esso è unico a meno di trasformazioni del tipo $\phi \mapsto \phi\gamma$ dove $\gamma = 1 + C$ e $C \in \Psi_-$ ha come coefficienti delle costanti.

Dimostrazione. Che la trasformazione $\phi \mapsto \phi\gamma$ lasci Q invariato è evidente (per ipotesi γ commuta con D). Supponiamo dato Q come da (48); vogliamo trovare $\phi = 1 + A$ tale che $Q = \phi D \phi^{-1}$ o equivalentemente $Q\phi = \phi D$, ovvero

$$(D + \sum_{i\geq 1} q_i D^{-i})(1 + \sum_{j\geq 1} a_j D^{-j}) = D + a_1 + \sum_{i\geq 1} a_{i+1} D^{-i}$$

Svolgendo i conti si ottiene

$$\sum_{i\geq 1} (a_i' + q_i + H_i(q,a)) D^{-i} = 0$$

il che equivale a imporre la famiglia numerabile di uguaglianze

$$a_i' + q_i + H_i(q,a) = 0 \qquad (i \geq 1) \tag{49}$$

Ora, siccome H_i dipende solo da $\{a_1, \ldots, a_{i-1}\}$ ciascuna di queste equazioni può essere risolta ricorsivamente per a_i:

$$a_i = -\int (q_i + H_i(q,a)) \tag{50}$$

il che dimostra l'esistenza di ϕ. Quanto all'unicità, supponiamo di aver scelto per ciascun $i \geq 1$ una primitiva di q_i che denotiamo $\widetilde{q}_i$, e sia ϕ l'elemento di G così ottenuto; allora $a_i = -\widetilde{q}_i - \int H_i(q,a)$. Ogni altra possibile scelta è del tipo $\widetilde{q}_i - c_i$ per opportune costanti c_i, e si ottiene così un operatore con coefficienti

$$a_i^c = -\widetilde{q}_i + c_i - \int H_i(q, a^c)$$

D'altro canto posto $\gamma := 1 + \sum_{i\geq 1} c_i D^{-i}$ risulta

$$\phi\gamma = 1 + \sum_{i\geq 1} (a_i + c_i + H_i(a,c)) D^{-i}$$

e basta quindi dimostrare che

$$-\int H_i(q, a^c) = -\int H_i(q,a) + H_i(a,c)$$

FIXME: ... □

A titolo di esempio, scriviamo esplicitamente i primi elementi del sistema di equazioni (50):

$$
\begin{aligned}
a_1 &= -\widetilde{q_1} \\
a_2 &= -\widetilde{q_2} + \widetilde{q_1\widetilde{q_1}} \\
a_3 &= -\widetilde{q_3} + \widetilde{q_2\widetilde{q_1}} - \widetilde{q_1^2} + \widetilde{q_1\widetilde{q_2}} - \widetilde{q_1\widetilde{q_1\widetilde{q_1}}}
\end{aligned}
$$

L'introduzione dell'operatore Q è utile perchè l'equazione che definisce il flusso KP assume una forma alla Lax.

Proposizione 28. Per ogni $k \in \mathbb{N}^*$ l'equazione di evoluzione (46) per ϕ determina la seguente equazione di evoluzione per Q:

$$\partial_k Q = \left[Q_+^k, Q\right] \tag{51}$$

Qui e nel seguito poniamo per brevità $Q_\pm^k := (Q^k)_\pm$.

Dimostrazione. Per definizione di Q è

$$\partial_k Q = (\partial_k \phi) D \phi^{-1} - \phi D \phi^{-1} (\partial_k \phi) \phi^{-1}$$

Dalla (46) risulta $\partial_k \phi = -Q_-^k \phi$ e quindi

$$= -Q_-^k \phi D \phi^{-1} + \phi D \phi^{-1} Q_-^k \phi \phi^{-1} = -Q_-^k Q + Q Q_-^k = -\left[Q_-^k, Q\right]$$

Ma $Q_-^k = Q^k - Q_+^k$ e $\left[Q^k, Q\right] = 0$, quindi questo non è altro che $\left[Q_+^k, Q\right]$. □

Si noti che perchè l'equazione (51) abbia senso occorre che il commutatore $\left[Q_+^k, Q\right]$ possieda solo potenze negative di D, cioè appartenga a Ψ_-. Questo segue subito dalla dimostrazione precedente, nella quale si è visto che

$$\left[Q_+^k, Q\right] = -\left[Q_-^k, Q\right] \tag{52}$$

e il secondo membro ha ordine massimo $-1 + 1 - 1 = -1$, come richiesto.

L'equazione (51), esattamente come la (46), produce un sistema di (infinite) equazioni differenziali alle derivate parziali per (infinite) funzioni incognite, che però stavolta sono i coefficienti q_i di Q. In particolare per $k = 1$ si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial t_1} Q = [Q_+, Q] = [D, Q] = \sum_{i \geq 1} q_i' D^{-i}$$

da cui un sistema di equazioni del tipo

$$\frac{\partial q_i}{\partial t_1} = q_i'$$

ovvero $\frac{\partial}{\partial t_1} = D = \frac{\partial}{\partial x}$: la variabile t_1 può quindi essere identificata con x, come anticipato.

Per $k = 2$ si ha $Q_+^2 = D^2 + 2q_1$ e le prime equazioni della corrispondente gerarchia sono

$$\frac{\partial q_1}{\partial t_2} = q_1'' + 2q_2' \qquad \frac{\partial q_2}{\partial t_2} = q_2'' + 2q_3' + 2q_1' q_1 \qquad \text{etc.}$$

Per $k = 3$ è $Q_+^3 = D^3 + 3q_1 D + 3(q_1' + q_2)$ e

$$\frac{\partial q_1}{\partial t_3} = q_1''' + 3q_2'' + 3q_3' + 6q_1' q_1 \qquad \text{etc.}$$

Se ora mettiamo a sistema le tre equazioni così ottenute:

$$\begin{cases} \partial_2 q_1 = q_1'' + 2q_2' \\ \partial_2 q_2 = q_2'' + 2q_3' + 2q_1' q_1 \\ \partial_3 q_1 = q_1''' + 3q_2'' + 3q_3' + 6q_1' q_1 \end{cases}$$

ed eliminiamo q_3' tra la seconda e la terza otteniamo

$$\begin{cases} \partial_2 q_1 = q_1'' + 2q_2' \\ 3\partial_2 q_2 - 2\partial_3 q_1 = -2q_1''' - 3q_2'' - 6q_1' q_1 \end{cases}$$

Eliminando ulteriormente q_2 (derivando in maniera opportuna e uguagliando le derivate) si arriva all'equazione

$$3\partial_2^2 q_1 - 4\partial_3 q_1' + (q_1''' + 12q_1' q_1)' = 0$$

Se ora poniamo $t_2 = y$, $t_3 = t$ e $u = 2q_1$ questa equazione si scrive

$$\frac{3}{4} u_{yy} = (u_t - \frac{1}{4} u_{xxx} - \frac{3}{2} u_x u)_x \tag{53}$$

che è l'equazione di Kadomtsev-Petviashvili; ciò motiva il nome di "gerarchia KP".

La (51) si generalizza in

$$\partial_k Q^\ell = \left[Q_+^k, Q^\ell\right] \qquad \text{per ogni } \ell \geq 1 \tag{54}$$

Questo si mostra immediatamente per induzione:

$$\partial_k Q^{\ell+1} = \partial_k (Q^\ell Q) = \left[Q_+^k, Q^\ell\right] Q + Q^\ell \left[Q_+^k, Q\right] = \left[Q_+^k, Q^{\ell+1}\right]$$

Allora è un gioco da ragazzi mostrare che:

Proposizione 29. Tutti i flussi KP commutano tra loro: $[\partial_k, \partial_\ell] = 0$ per ogni $k, \ell \in \mathbb{N}$.

Dimostrazione. Risulta (si noti che i ∂_k commutano con gli operatori di proiezione su $\Psi_\pm$):

$$\partial_k \partial_\ell \phi = -\partial_k (Q_-^\ell \phi) = -(\partial_k Q_-^\ell)\phi - Q_-^\ell (\partial_k \phi) =$$

$$= -(\partial_k Q^\ell)_- \phi + Q^\ell_- Q^k_- \phi = -\left[Q^k_+, Q^\ell\right]_- \phi + Q^\ell_- Q^k_- \phi$$

In definitiva

$$\partial_k \partial_\ell = -\left[Q^k_+, Q^\ell\right]_- + Q^\ell_- Q^k_-$$

da cui

$$[\partial_k, \partial_\ell] = -\left[Q^k_+, Q^\ell\right]_- + \left[Q^\ell_+, Q^k\right]_- + \left[Q^\ell_-, Q^k_-\right]$$

Ora, se nei primi due commutatori separiamo Q^ℓ e Q^k nelle loro parti differenziale e integrale e distribuiamo i prodotti, i due termini che coinvolgono solo parti differenziali spariscono causa la proiezione su Ψ_-; quanto all'ultimo commutatore, esso coincide evidentemente con la sua proiezione su Ψ_-. Ne segue che

$$[\partial_k, \partial_\ell] = \left[Q^\ell_-, Q^k_+\right]_- + \left[Q^\ell_+, Q^k_-\right]_- + \left[Q^\ell_-, Q^k_-\right]_-$$

D'altro canto

$$0 = \left[Q^\ell, Q^k\right]_- = (\left[Q^\ell_+, Q^k_+\right] + \left[Q^\ell_-, Q^k_+\right] + \left[Q^\ell_+, Q^k_-\right] + \left[Q^\ell_-, Q^k_-\right])_-$$

$$= \left[Q^\ell_-, Q^k_+\right]_- + \left[Q^\ell_+, Q^k_-\right]_- + \left[Q^\ell_-, Q^k_-\right]_-$$

Confrontando le ultime due espressioni si ha la tesi. □

Si noti che l'operatore pseudo-differenziale Q svolge un ruolo analogo a quello di una matrice di Lax nel caso finito-dimensionale. Questa analogia prosegue nel ricavare quantità conservate da Q, sostituendo la traccia di matrici con la traccia di Adler:

Proposizione 30. Le quantità $H_\ell := \operatorname{Tr} Q^\ell$ sono conservate.

Infatti

$$\partial_k \operatorname{Tr} Q^\ell = \operatorname{Tr} \partial_k Q^\ell = \operatorname{Tr} \left[Q^k_+, Q^\ell\right] = 0$$

per la ciclicità della traccia di Adler.

Quanto alla rappresentazione alla Zakharov-Shabat, si ha:

Proposizione 31. Gli operatori $B_k := Q^k_+$ soddisfano l'equazione di zero curvatura:

$$\partial_k B_\ell - \partial_\ell B_k = [B_k, B_\ell] \qquad \text{per ogni } \ell > k \geq 1 \tag{55}$$

Dimostrazione. Si ha $\partial_k B_\ell - \partial_\ell B_k = (\left[B_k, Q^\ell\right] - \left[B_\ell, Q^k\right])_+$ e $[B_k, B_\ell] = [B_k, B_\ell]_+$, dunque

$$\begin{aligned}\partial_k B_\ell - \partial_\ell B_k - [B_k, B_\ell] = (\left[B_k, Q^\ell\right] - \left[B_\ell, Q^k\right] - [B_k, B_\ell])_+ = \\ = -\left[B_k - Q^k, B_\ell - Q^\ell\right]_+ = -\left[Q^k_-, Q^\ell_-\right]_+ = 0 \quad \square\end{aligned}$$

Notiamo che la (55) origina automaticamente un sistema di equazioni *finito* e *determinato*: infatti B_k e B_ℓ dipendono unicamente dalle incognite differenziali $\{q_1, \dots, q_{\ell-1}\}$, inoltre il primo membro della (55) è un operatore differenziale i cui coefficienti non nulli partono da $\ell - 2$ (perchè i coefficienti dei termini di ordine massimo in B_k e B_ℓ sono costanti) e arrivano a 0, pertanto anche il secondo membro dev'essere di questa forma e la loro uguaglianza dà origine esattamente a $\ell - 1$ equazioni, tante quante sono le incognite.

Nel primo caso non banale della (55), che si ha per $k = 2$ e $\ell = 3$, si riottiene l'equazione KP. Infatti $B_2 = Q_+^2 = D^2 + 2q_1$ e $B_3 = Q_+^3 = D^3 + 3q_1 D + 3(q_1' + q_2)$, da cui

$$\partial_2 B_3 - \partial_3 B_2 = 3\partial_2 q_1 D + 3\partial_2 q_1' + 3\partial_2 q_2 - 2\partial_3 q_1$$
$$[B_2, B_3] = (3q_1'' + 6q_2')D + q_1''' + 3q_2'' - 6q_1 q_1'$$

Uguagliando questi due operatori differenziali e ponendo $u := 2q_1$, $w := q_2$, $t_2 = y$ e $t_3 = t$ si ha il sistema

$$\begin{cases} u_y = u_{xx} + 4w_x \\ u_{xy} + 2w_y - \frac{2}{3}u_t = \frac{1}{3}u_{xxx} + 2w_{xx} - uu_x \end{cases} \tag{56}$$

da cui, eliminando w, si riottiene la singola equazione (53).

§4. La funzione di Baker formale. Per studiare le soluzioni dell'equazione (51) l'idea è quella di considerare le autofunzioni di Q e di studiare la loro evoluzione confrontandole con quelle degli operatori (costanti) D^n per $n \geq 1$. Per implementare questo programma occorre anzitutto estendere l'algebra Ψ per far sì che l'equazione agli autovalori $D^n f = z^n f$ abbia soluzione; un modo per farlo è quello di considerare un modulo libero di rango 1 su Ψ generato da un "esponenziale formale".

Ricordiamo che stiamo operando sotto l'ipotesi che gli elementi di $\mathcal{A}$ siano funzioni di un'infinità numerabile di variabili $\boldsymbol{t} = \{t_i\}_{i\geq 1}$ tra le quali t_1 si identifica con x (la variabile rispetto a cui opera D). Introduciamo l'applicazione ξ che alla famiglia di variabili $\boldsymbol{t}$ associa la serie di potenze formale

$$\xi(\boldsymbol{t}, z) := \sum_{i\geq 1} t_i z^i \in \mathbb{K}[[z]]$$

Notiamo che ogni qualvolta $\boldsymbol{t}$ ha solo un numero finito di elementi diversi da zero $\xi(\boldsymbol{t}, z)$ definisce un genuino polinomio a coefficienti in $\mathbb{K}$.

Sia ora $\mathcal{M}$ l'insieme formato da tutte e sole le espressioni del tipo

$$\psi = \tilde{\psi} e^{\xi(\boldsymbol{t}, z)} \tag{57}$$

con $\tilde{\psi} \in \mathcal{A}((z^{-1}))$ (serie di Laurent formale in z^{-1} a coefficienti in $\mathcal{A}$). Con la somma definita nel modo ovvio $\mathcal{M}$ è un gruppo abeliano. Per definire un'azione di Ψ su $\mathcal{M}$ occorre e basta specificare in che modo D agisce su un'espressione del tipo (57). Ora, essendo

$$e^{\xi(\boldsymbol{t}, z)} = e^{xz + \sum_{i\geq 2} t_i z^i}$$

se fossimo in ambito analitico risulterebbe chiaramente

$$D.(\tilde{\psi}e^{\xi(\boldsymbol{t},z)}) = \tilde{\psi}'e^{\xi(\boldsymbol{t},z)} + \tilde{\psi}ze^{\xi(\boldsymbol{t},z)}$$

dove con $\tilde{\psi}'$ si intende la serie di Laurent formale che si ottiene facendo agire D sui coefficienti di $\tilde{\psi}$. Siamo dunque portati a definire

$$D.(\tilde{\psi}e^{\xi(\boldsymbol{t},z)}) := (\tilde{\psi}' + z\tilde{\psi})e^{\xi(\boldsymbol{t},z)}$$

da cui

$$D^n.(\tilde{\psi}e^{\xi(\boldsymbol{t},z)}) = \sum_{k\geq 0}\binom{n}{k}\tilde{\psi}^{(k)}z^{n-k}\, e^{\xi(\boldsymbol{t},z)} \tag{58}$$

per ogni $n \in \mathbb{Z}$. In particolare per $n = -1$ si ha

$$D^{-1}.(\tilde{\psi}e^{\xi(\boldsymbol{t},z)}) = (\tilde{\psi}z^{-1} - \tilde{\psi}'z^{-2} + \tilde{\psi}''z^{-3} + \dots)e^{\xi(\boldsymbol{t},z)}$$

Se $Q = \sum_{i\leq a} q_i D^i$ è un elemento di Ψ allora dalla (58) segue

$$Q.e^{\xi(\boldsymbol{t},z)} = \sum_{i\leq a} q_i z^i\, e^{\xi(\boldsymbol{t},z)}$$

da cui si vede che $\mathcal{M}$ è effettivamente un modulo libero di rango 1 su Ψ con generatore $e^{\xi(\boldsymbol{t},z)}$.

A questo punto possiamo procedere con il programma sopra delineato. Il primo (e sostanzialmente unico) passo è dato dalla seguente:

Proposizione 32. L'equazione agli autovalori

$$D\psi = z\psi$$

(con $\psi = \tilde{\psi}e^{\xi(\boldsymbol{t},z)}$, $\tilde{\psi}$ monica di ordine zero) ha come soluzione $\psi_0 = e^{\xi(\boldsymbol{t},z)}$, e ogni altra soluzione è della forma $\gamma\psi_0$ con

$$\gamma = 1 + \sum_{i\geq 1} c_i z^{-i} \tag{59}$$

e $c_i \in \mathcal{A}^D$ per ogni $i \geq 1$

Dimostrazione. Che sia $D.e^{\xi(\boldsymbol{t},z)} = ze^{\xi(\boldsymbol{t},z)}$ è chiaro dalla definizione. Supponiamo che ψ sia tale che $D.\psi = z\psi$, allora deve essere $(\tilde{\psi}' + z\tilde{\psi})e^{\xi(\boldsymbol{t},z)} = z\tilde{\psi}e^{\xi(\boldsymbol{t},z)}$ da cui $\tilde{\psi}' = 0$, il che accade se e solo se tutti i coefficienti di $\tilde{\psi}$ sono costanti. $\square$

Più in generale notiamo che ψ_0 è anche autofunzione per ciascun operatore D^n relativamente all'autovalore z^n. Passare dalle autofunzioni di D a quelle di Q è immediato:

Definizione 14. Dato $\phi = 1 + \sum_i a_i D^{-i} \in G$ l'elemento di $\mathcal{M}$ definito da

$$\psi(\boldsymbol{t}, z) := \phi\psi_0 = \Big(1 + \sum_{i\geq 1} a_i z^{-i}\Big)e^{\xi(\boldsymbol{t},z)} \tag{60}$$

si dice la **funzione di Baker formale associata a ϕ.**

Le soluzioni della gerarchia KP che costruiremo più avanti saranno caratterizzate dal fatto che tale espressione formale, se interpretata come funzione sulla sfera di Riemann, risulta effettivamente convergente in un intorno del punto all'infinito.

Proposizione 33. Per ogni $\phi \in G$ la relativa funzione di Baker formale è un'autofunzione dell'operatore $Q = \phi D \phi^{-1}$ relativa all'autovalore z:

$$Q\psi = z\psi \tag{61}$$

e ogni altra autofunzione di Q si ottiene da essa tramite moltiplicazione con una serie della forma (59).

Dimostrazione. Si ha

$$Q\psi = \phi D \phi^{-1} \phi \mathrm{e}^{\xi(\boldsymbol{t},z)} = \phi D \mathrm{e}^{\xi(\boldsymbol{t},z)} = \phi z \mathrm{e}^{\xi(\boldsymbol{t},z)} = z\psi$$

Supponiamo che $\bar{\psi}$ sia un'altra autofunzione di Q, allora $\phi D \phi^{-1} \bar{\psi} = z\bar{\psi}$ ovvero

$$D\phi^{-1}\bar{\psi} = \phi^{-1} z \bar{\psi} = z \phi^{-1} \bar{\psi}$$

(perchè z ha coefficienti costanti); questo ci dice che $\phi^{-1}\bar{\psi}$ è autofunzione di D relativamente all'autovalore z. Ma allora esiste γ della forma (59) tale che $\phi^{-1}\bar{\psi} = \gamma\psi_0$, cioè $\bar{\psi} = \phi\gamma\psi_0$ e siccome γ ha coefficienti costanti questa non è altro che $\gamma\psi$. □

Proposizione 34. Se ϕ è una soluzione dell'equazione di Sato (46) allora

$$\partial_k \psi = Q_+^k \psi \tag{62}$$

Dimostrazione. Si ha

$$\partial_k \psi = \partial_k (\phi \mathrm{e}^{\xi(\boldsymbol{t},z)}) = (\partial_k \phi) \mathrm{e}^{\xi(\boldsymbol{t},z)} + \phi \partial_k \mathrm{e}^{\xi(\boldsymbol{t},z)}$$

Ora, dalla (46) segue che $\partial_k \phi = -Q_-^k \phi$ e il primo addendo si scrive

$$(\partial_k \phi) \mathrm{e}^{\xi(\boldsymbol{t},z)} = -Q_-^k \phi \mathrm{e}^{\xi(\boldsymbol{t},z)} = -Q_-^k \psi$$

Per il secondo notiamo che in virtù dell'identificazione $t_1 = x$ risulta

$$\partial_k \mathrm{e}^{\xi(\boldsymbol{t},z)} = \frac{\partial}{\partial t_k} \mathrm{e}^{\xi(\boldsymbol{t},z)} = \frac{\partial^k}{\partial x^k} \mathrm{e}^{\xi(\boldsymbol{t},z)} = D^k \mathrm{e}^{\xi(\boldsymbol{t},z)} \tag{63}$$

(provare per credere), e dunque $\phi \partial_k \mathrm{e}^{\xi(\boldsymbol{t},z)} = \phi D^k \mathrm{e}^{\xi(\boldsymbol{t},z)} = \phi D^k \phi^{-1} \phi \mathrm{e}^{\xi(\boldsymbol{t},z)} = Q^k \psi$. In definitiva si ha

$$\partial_k \psi = (-Q_-^k + Q^k)\psi = Q_+^k \psi$$

come volevasi. □

Ne concludiamo che l'evoluzione di ψ sotto il k-esimo flusso KP è governata dal medesimo operatore che determina l'evoluzione di Q stesso; questo ci garantisce che ψ sia autofunzione di Q ad ogni tempo.

Dimostriamo ora che la gerarchia KP è "universale" nel seguente senso: se una qualunque funzione di Baker formale $\psi \in \mathcal{M}$ evolve tramite una famiglia di operatori *puramente differenziali* P_k, allora ψ è associata a un operatore ϕ che soddisfa l'equazione di Sato.

Proposizione 35. Sia data $\psi \in \mathcal{M}$ e supponiamo che per ogni $k \in \mathbb{N}$ risulti $\partial_k \psi = P_k \psi$ con $(P_k)_+ = P_k$; allora ψ è la funzione di Baker associata a una soluzione della gerarchia KP.

Dimostrazione. Sostituendo $\psi = \phi \mathrm{e}^{\xi(\boldsymbol{t},z)}$ nell'equazione $\partial_k \psi = P_k \psi$ e usando ancora la (63) si ottiene

$$(\partial_k \phi)\mathrm{e}^{\xi(\boldsymbol{t},z)} + \phi D^k \mathrm{e}^{\xi(\boldsymbol{t},z)} = P_k \phi \mathrm{e}^{\xi(\boldsymbol{t},z)}$$

da cui l'uguaglianza tra operatori pseudo-differenziali

$$\partial_k \phi + \phi D^k = P_k \phi$$

che si può riscrivere

$$P_k = (\partial_k \phi)\phi^{-1} + \phi D^k \phi^{-1} = (\partial_k \phi)\phi^{-1} + Q^k \tag{64}$$

Notiamo che $\partial_k \phi$ ha ordine massimo -1 mentre ϕ^{-1} ha ordine 0; il loro prodotto appartiene quindi a Ψ_-. Allora proiettando su Ψ_- l'uguaglianza (64) si ottiene che

$$0 = (\partial_k \phi)\phi^{-1} + Q^k_-$$

ovvero che ϕ soddisfa l'equazione di Sato. Proiettando la medesima uguaglianza su Ψ_+ si ottiene che $P_k = Q^k_+$, coerentemente con quanto stabilito nella proposizione 34. $\square$

Notiamo che le equazioni KP nella forma di Zakharov-Shabat (55) non sono altro che la condizione di compatibilità per il sistema lineare formato dalle equazioni (61) e (62):

$$\begin{cases} Q\psi = z\psi \\ \frac{\partial}{\partial t_k}\psi = B_k \psi \end{cases} \tag{65}$$

Se valgono le (55) allora la soluzione del sistema (65) è unica a meno di prodotti con elementi della forma $1 + z^{-1}\mathbb{C}[[z^{-1}]]$.

§5. L'equazione KP in forma bilineare. Se ϕ^* è l'aggiunto formale di ϕ e definiamo $\psi^a = (\phi^*)^{-1}\mathrm{e}^{-\xi(\boldsymbol{t},z)}$ allora si ha una ulteriore formulazione della gerarchia KP sotto forma della seguente identità:

$$\operatorname*{res}_{z=0} \psi(\boldsymbol{t},z)\psi^*(\boldsymbol{t}',z) = 0 \quad \text{per ogni } \boldsymbol{t},\boldsymbol{t}'$$

Quest'ultima è equivalente all'identità bilineare di Hirota:

$$\sum_{j=0}^{\infty} S_j(-2y)S_{j+1}(\tilde{D})\mathrm{e}^{\sum_k y_k D_k}\tau\cdot\tau = 0$$

dove si è definita la derivata di Hirota (rispetto a un polinomio P) come

$$P(D)f(x)\cdot g(x) := P(\frac{\partial}{\partial y})(f(x+y)g(x-y))\Big|_{y=0}$$

§6. La soluzione associata a un elemento di Gr**.** Vediamo ora in che modo è possibile associare a ciascun $W \in \mathrm{Gr}$ una soluzione della gerarchia KP. Cominciamo col ricordare che il gruppo Γ_+ delle funzioni g olomorfe nel disco D_0 con $g(0) = 1$ agisce su Gr. Dato $W \in \mathrm{Gr}$, definiamo[6]

$$\Gamma_+^W := \{\, g \in \Gamma_+ \mid Wg^{-1} \text{ è trasverso}\,\} \tag{66}$$

Vedremo in §3.4 che ciascun Γ_+^W è un aperto denso di Γ_+. Sia dato $g \in \Gamma_+^W$; allora per definizione la proiezione ortogonale π_+ ristretta a Wg^{-1} è un isomorfismo. Possiamo quindi considerare la controimmagine di $1 \in H_+$, che sarà una certa funzione $\tilde{\psi}_{W,g} \in Wg^{-1}$; essa si dice la **funzione di Baker ridotta associata a** W **e** g. Siccome $\pi_+(\tilde{\psi}_{W,g}) = 1$ essa non può contenere potenze positive di z, e quindi è della forma

$$\tilde{\psi}_{W,g}(z) = 1 + \sum_{i\geq 1} a_i(g)z^{-i} \tag{67}$$

per opportuni coefficienti a_i; vedremo nel seguito (proposizione 49) che essi si estendono a funzioni meromorfe sull'intero Γ_+. D'altro canto da $\tilde{\psi}_{W,g} \in Wg^{-1}$ segue che moltiplicando $\tilde{\psi}_{W,g}$ per g si ottiene un elemento del sottospazio W di partenza; la **funzione di Baker associata a** $W \in \mathrm{Gr}$ è l'applicazione ψ_W che ad ogni $g \in \Gamma_+^W$ associa tale elemento. Equivalentemente:

Proposizione 36. Dato $W \in \mathrm{Gr}$, ψ_W è l'unica espressione della forma

$$\psi_W(g,z) = \Big(1 + \sum_{i\geq 1} a_i(g)z^{-i}\Big)g(z) \tag{68}$$

tale che l'applicazione $z \mapsto \psi_W(g,z)$ appartiene a W per ogni $g \in \Gamma_+^W$.

Possiamo ora prendere contatto con lo schema formale sviluppato in precedenza: infatti scrivendo $g \in \Gamma_+$ in termini delle coordinate $\boldsymbol{t}$ la (68) si legge

$$\psi_W(\boldsymbol{t},z) = \Big(1 + \sum_{i\geq 1} a_i(\boldsymbol{t})z^{-i}\Big)\mathrm{e}^{\xi(\boldsymbol{t},z)} \tag{69}$$

[6]Nel seguito scriviamo l'azione di Γ_+ su Gr da destra anzichè da sinistra come in precedenza; essendo Γ_+ abeliano, ciò è del tutto ininfluente. Il motivo di questo cambio è che in questo modo si ottengono formule analoghe a quelle del caso multicomponente (in cui invece il lato conta).

che è un'espressione analoga alla (60), e definisce quindi un elemento del gruppo formale G dato da

$$\phi_W := 1 + \sum_{i\geq 1} a_i(\boldsymbol{t}) D^{-i} \tag{70}$$

Proposizione 37. L'operatore ϕ_W soddisfa l'equazione di Sato.

Dimostrazione. Per la proposizione 35 basta dimostrare che l'evoluzione temporale di ψ_W rispetto a ogni tempo coincide con l'azione di un operatore puramente differenziale. Per calcolo diretto a partire dalla (69) risulta

$$\begin{aligned}\partial_k \psi_W &= \sum_{i\geq 1} \frac{\partial a_i}{\partial t_k}(\boldsymbol{t}) z^{-i} \mathrm{e}^{\xi(\boldsymbol{t},z)} + \left(1 + \sum_{i\geq 1} a_i(\boldsymbol{t}) z^{-i}\right) z^k \mathrm{e}^{\xi(\boldsymbol{t},z)} \\ &= \left(z^k + a_1(\boldsymbol{t}) z^{k-1} + \dots + a_k(\boldsymbol{t}) + (a_{k+1}(\boldsymbol{t}) + \frac{\partial a_1}{\partial t_k}(\boldsymbol{t})) z^{-1} + \dots\right) \mathrm{e}^{\xi(\boldsymbol{t},z)}\end{aligned} \tag{71}$$

e d'altro canto per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$D^n \psi_W = (z^n + O(z^{n-1})) \mathrm{e}^{\xi(\boldsymbol{t},z)}$$

Confrontando queste due espressioni si vede che prendendo opportune combinazioni lineari dei D^n (con coefficienti che sono polinomi differenziali nelle a_i) si può costruire un operatore puramente differenziale P_k di grado k tale che

$$\partial_k \psi_W - P_k \psi_W = O(z^{-1}) g(z) \tag{72}$$

Ora, siccome a $\boldsymbol{t}$ fissati la funzione $z \mapsto \psi_W(\boldsymbol{t}, z)$ appartiene a W lo stesso vale per le derivate $\partial_k \psi_W$ e $D^r \psi_W$; ne segue che il membro sinistro della (72) è una funzione che appartiene a W per ogni fissato $g \in \Gamma_+^W$. Ma il membro destro appartiene a $H_- g$; siccome $W g^{-1}$ è trasverso, l'unica possibilità è che entrambi i membri siano nulli. Allora $\partial_k \psi_W = P_k \psi_W$ come richiesto. □

Se ne conclude, come anticipato, che:

Proposizione 38. Ad ogni punto di Gr si associa una soluzione della gerarchia KP.

Tale soluzione è espressa equivalentemente dalla funzione di Baker ψ_W, dall'operatore di ordine zero ϕ_W o dall'operatore di ordine uno Q_W; per quest'ultimo vale l'avvertenza che tutti i $\phi \in G$ che differiscono tra loro solo per moltiplicazione da destra con una serie a coefficienti costanti danno origine al medesimo Q.

Si noti che i parametri di evoluzione t_k per le (infinite) equazioni della gerarchia KP si identificano con le (infinite) coordinate $\boldsymbol{t}$ che determinano la funzione $g \in \Gamma_+$. Normalmente per "flusso KP" si intende una successione $\boldsymbol{t}$ avente solo un numero finito di elementi diversi da zero; ciò corrisponde al restringersi da Γ_+ al sottogruppo formato dalle funzioni del tipo $\mathrm{e}^{p(z)}$, con p polinomio.

Consideriamo ora in particolare il caso in cui $\boldsymbol{t}_{>1} = \boldsymbol{0}$; in altre parole, ci restringiamo da Γ_+ al suo sottogruppo a un parametro $\Gamma_{+,1} := \{\mathrm{e}^{xz}\}_{x\in\mathbb{C}} \cong (\mathbb{C}, +)$. L'espressione che si ottiene a seguito di questa restrizione si dirà la **funzione di Baker stazionaria** associata a W:

$$\psi_W(x,z) := \psi_W(e^{xz},z) = \Big(1+\sum_{i\geq 1} a_i(x) z^{-i}\Big) \mathrm{e}^{xz} \tag{73}$$

Questa restrizione può sembrare piuttosto drastica (stiamo trascurando infinite variabili) ma in realtà non comporta alcuna perdita di generalità:

Proposizione 39. Un sottospazio $W \in \mathrm{Gr}$ è univocamente determinato dalla sua funzione di Baker stazionaria.

Dimostrazione. Sia data un'espressione del tipo (73); basta allora definire W come la chiusura in L^2 del sottospazio di H generato dalle funzioni $\{z \mapsto \psi_W(x,z)\}$ al variare di $x \in \mathbb{C}$. $\square$

Se ψ_W è regolare in $x = 0$ possiamo anche considerare la famiglia di funzioni $\partial_x^n \psi_W(x,z)\big|_0$ al variare di $n \in \mathbb{N}$; dalla (73) segue che esse appartengono a W e la loro espansione in serie per z ha come prima potenza z^n, quindi esse formano una base per il sottospazio denso W^{alg} che determina W.

Tornando al caso generale, sia ψ_W la funzione di Baker associata a W e consideriamo il sottospazio γW per qualche $\gamma \in \Gamma$. La corrispondente funzione di Baker si scrive

$$\psi_{\gamma W}(g,z) = g\ \pi_+\big|_{g^{-1}\gamma W}^{-1}(1)$$

Poniamo $h := \gamma^{-1} g$, allora $h^{-1} = g^{-1}\gamma$ e

$$= \gamma h\ \pi_+\big|_{h^{-1}W}^{-1}(1) = \gamma \psi_W(g,z)$$

Se ne conclude che

$$\psi_{\gamma W} = \gamma \psi_W \qquad \text{per ogni } \gamma \in \Gamma,\ W \in \mathrm{Gr} \tag{74}$$

Consideriamo infine l'effetto delle trasformazioni di scala. Sia Q una soluzione della r-esima equazione della gerarchia KP: $\frac{\partial}{\partial t_r} Q = [Q_+^r, Q]$. Se $Q = D + \sum_i q_i D^{-i}$, dato $\lambda \in \mathbb{C}^*$ definiamo

$$R_\lambda(Q) := D + \sum_{i\geq 1} q_i^{(\lambda)} D^{-i}$$

dove

$$q_i^{(\lambda)}(x, t_r, \boldsymbol{t}_{\neq r}) := \lambda^{i+1} q_i(\lambda x, \lambda^r t_r, \boldsymbol{t}_{\neq r})$$

Allora $R_\lambda(Q)$ è anch'esso una soluzione della r-esima equazione della gerarchia. Gli operatori R_λ si dicono le **trasformazioni di scala** sullo spazio delle soluzioni della gerarchia KP. Da notare che ogni variabile viene riscalata in accordo con il suo peso.

Ora, per ogni λ tale che $|\lambda| \leq 1$ la funzione di Baker che corrisponde allo spazio $R_\lambda(W)$ è data da

$$\psi_{R_\lambda(W)}(\boldsymbol{t}, z) = \psi_W(\lambda.\boldsymbol{t}, \lambda^{-1} z)$$

dove si è posto $\lambda.\{t_1, t_2, t_3, \dots\} := \{\lambda t_1, \lambda^2 t_2, \lambda^3 t_3, \dots\}$. Se Q è l'operatore determinato dal sottospazio W allora l'operatore determinato da $R_\lambda(W)$ è $R_\lambda(Q)$, come si verifica facilmente.

§7. Le gerarchie GD. La gerarchia KP è un sistema di infinite equazioni differenziali alle derivate parziali in infinite funzioni incognite; tuttavia essa "contiene" in maniera naturale delle sotto-gerarchie che coinvolgono solo un numero *finito* di incognite. Più precisamente, per ogni $n \geq 1$ si può costruire una gerarchia (cioè un sistema di infinite equazioni differenziali) che coinvolge esattamente n funzioni incognite; esse si dicono le **gerarchie di Gelfand-Dickey**, o **gerarchie KdV generalizzate** (questo nome deriva dal fatto che per $n = 1$ si ottiene la celebre gerarchia KdV).

L'osservazione fondamentale è la seguente. Si è visto che se Q soddisfa l'equazione (51) allora anche tutte le sue potenze soddisfano la medesima equazione alla Lax (54). D'altro canto nella (54), posto $\ell = n + 1$, è coerente imporre che Q^{n+1} sia un operatore *puramente differenziale* ($Q_-^{n+1} = 0$), perchè in tal caso è anche $\left[Q_+^k, Q^{n+1}\right] \in \Psi_+$ e inoltre

$$\operatorname{ord}\left[Q_+^k, Q^{n+1}\right] = \operatorname{ord}\left[-Q_-^k, Q^{n+1}\right] \leq -1 + (n+1) - 1 = n - 1$$

cioè $\left[Q_+^k, Q^{n+1}\right] \in \Psi_{+,n-1}$, e quindi l'equazione

$$\partial_k Q^{n+1} = \left[Q_+^k, Q^{n+1}\right] \tag{75}$$

coinvolge due operatori pseudo-differenziali del medesimo ordine. Se ne conclude che, dato Q tale che $Q^{n+1} \in \Psi_+$, resta definito un sistema di infinite equazioni differenziali alle derivate parziali negli n coefficienti non nulli di Q; conviene allora cambiare punto di vista e partire direttamente dall'operatore differenziale $L := Q^{n+1}$.

Proposizione 40. Ad ogni operatore differenziale di ordine $n + 1$ monico e privo del termine di ordine n

$$L = D^{n+1} + u_{n-1}D^{n-1} + \cdots + u_1 D + u_0$$

si associa la gerarchia di equazioni differenziali nelle n incognite $\{u_{n-1}, \ldots, u_0\}$ data da

$$\partial_k L = \left[Q_+^k, L\right] \tag{76}$$

dove Q è la radice $(n + 1)$-esima di L.

Le equazioni (76) formano la **n-esima gerarchia di Gelfand-Dickey**. Notiamo che le equazioni della gerarchia che corrispondono alle variabili t_k in cui k è multiplo di $n+1$ (diciamo $k = m(n + 1)$) sono banali, poichè in tal caso $Q^k = (Q^{n+1})^m = L^m$ commuta con L.

Proposizione 41. Ad ogni soluzione L della n-esima gerarchia GD corrisponde una e una sola soluzione Q della gerarchia KP tale che Q^{n+1} è un operatore differenziale.

Basta a tale scopo considerare l'applicazione $L \mapsto Q$; la (54) ci dice che se Q soddisfa una equazione di Lax allora anche $L = Q^{n+1}$ la soddisfa, per il viceversa FIXME: ...

Come esempio si consideri il caso $n = 1$, in cui L non è altro che l'operatore di Schrödinger unidimensionale: $L = D^2 + u$. Sia Q la sua radice quadrata in Ψ; per calcolo diretto si trova che i primi coefficienti di Q sono

$$q_1 = \frac{1}{2}u \qquad q_2 = -\frac{1}{4}u' \qquad q_3 = \frac{1}{8}(u'' - u^2)$$

L'equazione (75) per $t = t_3$ (primo caso non banale) si legge

$$\partial_t L = \left[Q_+^3, L\right]$$

Questa è l'equazione KdV per la funzione u: infatti $Q_+^3 = D^3 + \frac{3}{2}uD + \frac{3}{4}u'$, da cui

$$\left[Q_+^3, L\right] = \frac{1}{4}u''' + \frac{3}{2}u'u$$

quindi in definitiva si ha l'equazione differenziale

$$u_t = \frac{1}{4}u_{xxx} + \frac{3}{2}u_x u$$

che è l'equazione di Korteweg-de Vries. Quanto agli integrali del moto, risulta

$$J_1 = \operatorname{Tr} Q = \frac{1}{2}\int u$$

$$J_3 = \operatorname{Tr} Q^3 = \int \frac{1}{8}(u'' + 3u^2) \sim \frac{3}{8}\int u^2$$

$$J_5 = \operatorname{Tr} Q^5 = \int \frac{1}{32}(u'''' + 10u''u + 5u'^2 + 10u^3) \sim \frac{5}{32}\int (2u^3 - u'^2)$$

e così via.

§8. Soluzioni delle gerarchie GD. Dimostriamo ora che, nello schema descritto in precedenza, le soluzioni delle gerarchie GD sono individuate dai punti delle sottograssmanniane che abbiamo denotato $\mathrm{Gr}^{(n)}$ (definite in §1.10).

Proposizione 42. La soluzione di KP associata a un punto $W \in \mathrm{Gr}^{(n)}$ è una soluzione della $(n-1)$-esima gerarchia GD.

Dimostrazione. Occorre mostrare che l'operatore Q_W associato a W è tale che $L_W := Q_W^n$ è un operatore differenziale. Dalla dimostrazione della proposizione 37 sappiamo che per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste un operatore differenziale P_k tale che $P_k\psi_W = \partial_k\psi_W$, prendendo $k = n$ e usando l'espressione esplicita (71) risulta

$$P_n\psi_W - z^n\psi_W = \sum_{i\geq 1} \frac{\partial a_i}{\partial t_n}(\boldsymbol{t})z^{-i}g(z)$$

Se ora $W \in \mathrm{Gr}^{(n)}$ abbiamo che il membro sinistro di questa uguaglianza appartiene a W per ogni $\boldsymbol{t}$ fissato; ma allora per lo stesso argomento usato nella dimostrazione della proposizione 37 entrambi i membri dell'uguaglianza precedente devono essere nulli. Ne concludiamo da un lato che

$$P_n \psi_W = z^n \psi_W \tag{77}$$

e dall'altro che ciascun coefficiente a_i di ψ_W è indipendente dal tempo di pedice n. Da questo segue che ϕ_W e Q_W sono a loro volta indipendenti da t_n; la (64) ci dice allora che $(Q_W^n)_+ = P_n = Q_W^n$, come volevasi. □

In particolare consideriamo l'operatore differenziale "stazionario" $\tilde{L}_W$ che si ottiene ponendo $\boldsymbol{t}_{>1} = \mathbf{0}$ nei suoi coefficienti; sia $\mathscr{C}^{(n)}$ lo spazio di tali operatori al variare di $W \in \mathrm{Gr}^{(n)}$. La mappa $\mathrm{Gr}^{(n)} \to \mathscr{C}^{(n)}$ non è iniettiva: risulta $\tilde{L}_W = \tilde{L}_{W'}$ precisamente quando W e W' sono legati tra loro dall'azione di un elemento $\gamma \in \Gamma_-$ a coefficienti costanti. Ora, siccome la moltiplicazione per γ commuta con l'azione di Γ_+, il risultato precedente ci dice che l'azione di Γ_+ su $\mathrm{Gr}^{(n)}$ induce un'azione su $\mathscr{C}^{(n)}$, e il flusso $W \mapsto \mathrm{e}^{t_k z^k} W$ induce il k-esimo flusso KdV su $\mathscr{C}^{(n)}$.

3 La funzione tau

§1. Il fibrato determinante. Sulla grassmanniana finito-dimensionale $\mathrm{Gr}(n,k)$ dei k-piani in $\mathbb{C}^n$ il *fibrato determinante* è il fibrato di rette olomorfo la cui fibra sul punto $W \in \mathrm{Gr}(n,k)$ è la potenza esterna massima di W, cioè lo spazio (unidimensionale) $\Lambda^k(W)$; un tipico elemento di tale fibra si scrive

$$\lambda w_1 \wedge \cdots \wedge w_k$$

dove $\lambda \in \mathbb{C}$ e $\{w_i\}_{i=1\dots k}$ è una base per W. In analogia con questo caso, vorremmo costruire un fibrato su Gr la cui fibra sopra $W \in \mathrm{Gr}$ consista di elementi del tipo

$$\lambda w_1 \wedge w_2 \wedge \dots$$

dove $\{w_i\}_{i\geq 1}$ è una base per W. Chiaramente questa non può essere una base qualunque: infatti, date due basi $\{w_i\}$ e $\{w'_j\}$ vogliamo che l'operatore di passaggio A abbia determinante, in modo tale da poter richiedere che sia

$$\lambda w_1 \wedge w_2 \wedge \cdots = \det A \cdot \lambda w'_1 \wedge w'_2 \wedge \dots$$

Ma ciò equivale proprio ad imporre che le basi $\{w_i\}$ e $\{w'_i\}$ siano *ammissibili.* Definiamo allora un fibrato Det su Gr nella maniera seguente: per ogni carta locale U_S con $S \in \mathscr{S}$ definiamo $\mathrm{Det}(U_S)$ come l'insieme delle coppie (w, λ) dove w è una base ammissibile per $W \in U_S$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, modulo la relazione di equivalenza

$$(w,\lambda) \sim (w',\lambda') \quad \text{se e solo se} \quad \begin{cases} w' = wA^{-1} \\ \lambda' = \lambda \det A \end{cases} \tag{78}$$

Si ottiene così un fibrato localmente banale: una bigezione tra $\mathrm{Det}(U_S)$ e $U_S \times \mathbb{C}$ è data da

$$[w,\lambda] \mapsto (W,\lambda)$$

dove w è la base canonica di W (definita tramite l'uguaglianza (13)). Quanto alle funzioni di transizione, supponiamo che $W \in U_S \cap U_{S'}$ sia simultaneamente il grafico dei due operatori compatti $K\colon H_S \to H_S^\perp$ e $K'\colon H_{S'} \to H_{S'}^\perp$; allora tra di essi sussiste la relazione (5) (con $T_0 = K$ e $T_1 = K'$) e quindi tra le coppie $[w,\lambda] \in \mathrm{Det}(U_S)$ e $[w,\lambda'] \in \mathrm{Det}(U_{S'})$ sussiste la relazione

$$\lambda' = \lambda \det(a + bK)$$

che esprime λ' come funzione olomorfa di K e λ nell'aperto in esame. (Più concretamente, $\det(a+bK)$ si riduce al determinante della matrice *finita* formata dalle righe $S' \setminus S$ e dalle colonne $S \setminus S'$ della matrice associata a K.)

Ora, nel caso finito-dimensionale il gruppo $\mathrm{GL}(n)$ agisce su $\mathrm{Gr}(n,k)$ e anche sullo spazio totale del fibrato determinante costruito su di esso. Nel caso infinito-dimensionale il gruppo che agisce su Gr è $\mathrm{GL}_{\mathrm{res}}(H)$, ma si verifica facilmente che esso *non* porta basi ammissibili in basi ammissibili. Infatti data w ammissibile per W e preso $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in$

$\mathrm{GL}_{\mathrm{res}}(H)$ risulta $(gw)_+ = aw_+ + bw_-$ che, senza imporre ulteriori condizioni su a, può non avere determinante; dunque la base gw può non essere ammissibile per il sottospazio gW.

Per superare questo problema procediamo come segue. Denotiamo con $\mathrm{GL}_1(H)$ il sottogruppo di $\mathrm{GL}(H)$ i cui elementi si scrivono $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ con a, d di Fredholm (di indice zero) e b, c di classe traccia. Affermiamo che l'azione di $\mathrm{GL}_1(H)$ si solleva (proiettivamente) a Det; ovvero, esiste una estensione centrale $\tilde{\mathrm{GL}}_1$ di $\mathrm{GL}_1(H)$ per $\mathbb{C}^*$ che agisce su Det, coprendo l'azione di $\mathrm{GL}_1(H)$ su Gr.

Per vederlo cominciamo col definire $\mathcal{E}$ come il sottogruppo di $\mathrm{GL}_1(H) \times \mathrm{GL}(H_+)$ formato dalle coppie (g, q) tali che aq^{-1} ha determinante; la topologia su di esso è quella indotta dall'embedding $(g, q) \mapsto (g, q, aq^{-1} - \mathrm{id})$ in $\mathrm{GL}_1(H) \times \mathrm{GL}(H_+) \times \mathcal{C}_1(H_+)$. Allora un elemento $(g, q) \in \mathcal{E}$ agisce sullo spazio delle basi ammissibili $\mathcal{P}$ tramite la posizione

$$(g, q)\,.w = gwq^{-1}$$

Questa è ben definita perchè $(gwq^{-1})_+ = aw_+q^{-1} + bw_-q^{-1}$ che ha determinante perchè

$$aw_+q^{-1} + bw_-q^{-1} - \mathrm{id} = (aq^{-1}qw_+q^{-1} - \mathrm{id}) + bw_-q^{-1}$$

è la somma di due operatori di classe traccia (aq^{-1} ha determinante per definizione di $\mathrm{GL}_1(H)$ e qw_+q^{-1} per definizione di base ammissibile). Allora $\mathcal{E}$ agisce su Det ponendo

$$(g, q)\,.[w, \lambda] = [gwq^{-1}, \lambda]$$

Ora, c'è un morfismo canonico $\mathcal{E} \to \mathrm{GL}_1(H)$ definito da $(g, q) \mapsto g$; il suo nucleo può essere identificato con $\mathcal{T}$. Allora abbiamo un'estensione

$$\mathcal{T} \to \mathcal{E} \to \mathrm{GL}_1(H)$$

Inoltre il sottogruppo $\mathcal{T}_1$ formato dalle coppie del tipo (id, q) con $\det q = 1$ agisce banalmente, quindi in effetti l'azione su Det è quella del quoziente $\tilde{\mathrm{GL}}_1 := \mathcal{E}/\mathcal{T}_1$. Abbiamo dunque, come preannunciato, un'estensione centrale di $\mathrm{GL}_1(H)$ per $\mathcal{T}/\mathcal{T}_1 = \mathbb{C}^*$:

$$\mathbb{C}^* \to \tilde{\mathrm{GL}}_1 \to \mathrm{GL}_1(H)$$

Questo è un fibrato non banale: non c'è alcuna sezione continua $\mathrm{GL}_1(H) \to \tilde{\mathrm{GL}}_1$, e quindi l'estensione non può essere descritta da un cociclo continuo. Se però ci restringiamo all'aperto denso $\mathrm{GL}_1^{\mathrm{reg}}$ di $\mathrm{GL}_1(H)$ definito dalla richiesta che a sia invertibile allora esiste una sezione $s\colon \mathrm{GL}_1^{\mathrm{reg}} \to \mathcal{E}$ definita da $g \mapsto (g, a)$. Presi $g_1, g_2 \in \mathrm{GL}_1^{\mathrm{reg}}$ e posto $g_3 := g_1 g_2$ (e supponendo che sia ancora $g_3 \in \mathrm{GL}_1^{\mathrm{reg}}$) risulta

$$\tilde{g}_1 \tilde{g}_2 = c(g_1, g_2)\tilde{g}_3$$

dove

$$c(g_1, g_2) = \det(a_1 a_2 a_3^{-1})$$

Da notare che gli operatori a_1, a_2 e a_3 possono non avere determinante di per sè, ma la loro combinazione sì.

Possiamo far agire gli elementi di $\mathrm{GL}_1^{\mathrm{reg}}$ su Det tramite s. Ovviamente $\mathrm{GL}_1^{\mathrm{reg}}$ non è un gruppo, e la mappa s non è moltiplicativa. Ma se GL_1^+ è il sottogruppo di $\mathrm{GL}_1^{\mathrm{reg}}$ formato dagli elementi per cui $c = 0$, allora la restrizione di s a GL_1^+ è un'inclusione di gruppi $\mathrm{GL}_1^+ \to \mathcal{E}$ e quindi possiamo considerare GL_1^+ come un gruppo di automorfismi del fibrato Det. Allo stesso modo si può procedere per il sottogruppo GL_1^- formato dagli elementi tali che $b = 0$. Se ne conclude che i gruppi $\Gamma_\pm$ agiscono su Det (essendo $\Gamma_\pm \subseteq \mathrm{GL}_1^\pm$) nella maniera seguente:

$$g.[w, \lambda] = [gwa^{-1}, \lambda] \tag{79}$$

Consideriamo ora il *duale* del fibrato determinante sopra introdotto, denotato Det^*; i suoi elementi sono le coppie (w, λ), con w base ammissibile per W e $\lambda \in \mathbb{C}$, modulo la relazione di equivalenza (cfr. (78))

$$(w, \lambda) \sim (w', \lambda') \qquad \text{se e solo se} \qquad \begin{cases} w' = wA \\ \lambda' = \lambda \det A \end{cases} \tag{80}$$

Questo fibrato, contrariamente a Det, *possiede* sezioni olomorfe globali: esse sono date dalle coordinate di Plucker. Infatti una sezione di Det^* non è altro che una funzione olomorfa $\mathrm{Det} \to \mathbb{C}$ lineare su ciascuna fibra, e dato $S \in \mathscr{S}_0$ la coordinata Π_S definisce una funzione siffatta tramite la posizione

$$[w, \lambda] \mapsto \lambda \Pi_S(w)$$

Lo spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ menzionato nella proposizione 11 è quindi contenuto nel duale dello spazio delle sezioni $\Gamma(\mathrm{Det}^*)$ (in effetti è un sottospazio denso in esso). L'embedding $\Pi\colon \mathrm{Gr} \to \mathbb{P}(\mathcal{H})$ è indotto da un'applicazione olomorfa $\Pi\colon \mathrm{Det} \to \mathcal{H}$ lineare su ciascuna fibra; il fibrato Det quindi non è altro che il pullback del fibrato tautologico su $\mathbb{P}(\mathcal{H})$.

§2. La funzione tau. Su Det^* c'è la sezione "canonica" σ definita da

$$\sigma(W) := [w, \det w_+] \tag{81}$$

Ora, l'azione di $\widetilde{\mathrm{GL}}_1$ su Det induce per dualità un'azione su Det^*; in particolare il gruppo Γ_+ agisce su tale fibrato, e la sezione σ *non* è equivariante rispetto ad essa.

Definizione 15. Per ogni $W \in \mathrm{Gr}$ la **funzione tau associata a** W è la funzione olomorfa $\tau_W\colon \Gamma_+ \to \mathbb{C}$ definita da

$$\tau_W(g) = \frac{\sigma(g^{-1}W)}{g^{-1}\delta_W} \tag{82}$$

dove δ_W è un qualunque elemento non nullo della fibra di Det^* su W.

In generale non c'è alcuna scelta canonica per δ_W, quindi la funzione tau è definita solo a meno di una costante. D'altro canto se W è trasverso è naturale prendere $\delta_W = \sigma(W)$, e in tal caso risulta

$$\tau_W(g) = \frac{\sigma(g^{-1}W)}{g^{-1}\sigma(W)} \tag{83}$$

Notiamo che τ_W si annulla esattamente per quei $g \in \Gamma_+$ tali che $g^{-1}W$ non è trasverso, cioè sul complementare dell'insieme Γ_+^W (cfr. (66)).

Proposizione 43. Sia $g^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_+$, allora per ogni $W \in \mathrm{Gr}$ risulta

$$\tau_W(g) = \det(w_+ + a^{-1}bw_-) \tag{84}$$

dove w è una qualunque base ammissibile per W. In particolare se W è trasverso e τ_W è normalizzata come da (83) risulta

$$\tau_W(g) = \det(\mathrm{id}_{H_+} + a^{-1}bK) \tag{85}$$

dove $K\colon H_+ \to H_-$ è l'operatore il cui grafico è W.

Dimostrazione. Prendiamo ad esempio $\delta_W = [w, 1]$, allora a denominatore della (82) figura (come da (79))

$$g^{-1}.\delta_W = g^{-1}.[w, 1] = [g^{-1}wa^{-1}, 1]$$

e a numeratore

$$\sigma(g^{-1}W) = [g^{-1}w, \det(aw_+ + bw_-)] \sim [g^{-1}wa^{-1}, \det a^{-1} \det(aw_+ + bw_-)]$$

dove si è usata la relazione di equivalenza (80). Ne segue che $\tau_W(g) = \det(w_+ + a^{-1}bw_-)$, come volevasi. Se poi W è trasverso e si prende $\delta_W = \sigma(W) = [w, \det w_+]$ allora $g^{-1}\delta_W = [g^{-1}wa^{-1}, \det w_+]$, quindi

$$\tau_W(g) = \frac{\det(w_+ + a^{-1}bw_-)}{\det w_+}$$

e la (85) segue dal fatto che $w_-w_+^{-1} = (\pi_-w)(\pi_+w)^{-1} = p_-p_+^{-1} = K$. $\square$

Possiamo subito derivare una formula banale ma importante per il seguito.

Proposizione 44. Per ogni $W \in \mathrm{Gr}$, $g \in \Gamma_+^W$ e $h \in \Gamma_+$ risulta $\tau_W(gh) = \tau_W(g)\tau_{g^{-1}W}(h)$.

Questo si vede facilmente mettendo assieme la (82) e la (83):

$$\tau_{g^{-1}W}(h)\tau_W(g) = \frac{\sigma(h^{-1}g^{-1}W)}{h^{-1}\sigma(g^{-1}W)} \frac{\sigma(g^{-1}W)}{g^{-1}\delta_W} = \frac{\sigma((gh)^{-1}W)}{(gh)^{-1}\delta_W} = \tau_W(gh)$$

In particolare prendendo $h = 1$ si ha che $\tau_W(1) = 1$ per ogni W trasverso (in caso contrario è ovviamente $\tau_W(1) = 0$), mentre prendendo $h = g^{-1}$ (e sempre supponendo W trasverso) si ha che $\tau_{g^{-1}W}(g^{-1}) = (\tau_W(g))^{-1}$.

Ancora, se supponiamo nota τ_W ed è dato $g \in \Gamma_+^W$ qualunque, la funzione tau associata al sottospazio $g^{-1}W$ è

$$\tau_{g^{-1}W}(h) = \frac{\tau_W(gh)}{\tau_W(g)} \equiv \tau_W(gh) \tag{86}$$

essendo il fattore $\tau_W(g)^{-1}$ una costante che non dipende da h. Questo ci dice che il generico flusso KP $g \in \Gamma_+$ agisce sulle funzioni tau premoltiplicando il loro argomento per g. Nelle coordinate $\boldsymbol{t}$,

$$\tau_{\boldsymbol{t}.W}(\boldsymbol{s}) = \tau_W(\boldsymbol{t}+\boldsymbol{s}) \tag{87}$$

e in particolare $\tau_{\boldsymbol{t}.W}(\boldsymbol{0}) = \tau_W(\boldsymbol{t})$.

Quanto all'azione degli elementi di Γ_-, risulta

$$\tau_{\gamma W} = G(\gamma)\tau_W \tag{88}$$

dove $G(\mathrm{e}^{\alpha z^{-k}}) = \mathrm{e}^{-\alpha k t_k}$ è una mappa $\Gamma_- \to \Gamma_+$.

Le espressioni (84) e (85) si possono scrivere in altre forme, talvolta più convenienti nella pratica. Cominciamo col notare che, sempre scrivendo $g^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)$, sussiste la seguente uguaglianza tra applicazioni $H_- \to H_+$:

$$a^{-1}b = g\pi_+ g^{-1} \tag{89}$$

Infatti presa $f \in H_-$ risulta

$$g^{-1}f = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b(f) \\ d(f) \end{pmatrix}$$

e dunque

$$g\pi_+(g^{-1}f) = \begin{pmatrix} a^{-1} & -a^{-1}bd^{-1} \\ 0 & d^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b(f) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{-1}(b(f)) \\ 0 \end{pmatrix}$$

come volevasi.

Consideriamo ora il caso in cui W è trasverso; affermiamo allora che sussiste la seguente uguaglianza (questa volta tra applicazioni $H_+ \to H_+$):

$$\mathrm{id}_{H_+} + a^{-1}bK = g\pi_+ g^{-1} p_+^{-1} \tag{90}$$

Infatti in tal caso p_+ è invertibile e $p_+^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} \mathrm{id} \\ K \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} \mathrm{id} \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ K \end{smallmatrix}\right)$, inoltre

$$g\pi_+ g^{-1}\begin{pmatrix} \mathrm{id} \\ 0 \end{pmatrix} = g\pi_+\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{id} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{-1} & -a^{-1}bd^{-1} \\ 0 & d^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \mathrm{id}_{H_+}$$

e quindi, usando la (89),

$$g\pi_+ g^{-1} p_+^{-1} = \mathrm{id}_{H_+} + g\pi_+ g^{-1}K = \mathrm{id}_{H_+} + a^{-1}bK$$

Se ne conclude che

$$\tau_W(g) = \det(g\pi_+ g^{-1} p_+^{-1}) \tag{91}$$

L'operatore che figura nella (91) si può rappresentare come segue:

$$H_+ \xrightarrow{p_+^{-1}} W \xrightarrow{g^{-1}} g^{-1}W \xrightarrow{\pi_+} H_+ \xrightarrow{g} H_+$$

e in questo senso ci ricorda la definizione della funzione di Baker: infatti per $g \in \Gamma_+^W$ si ha che ψ è l'immagine di $1 \in H_+$ secondo la mappa

$$H_+ \xrightarrow{\pi_+|_{g^{-1}W}^{-1}} g^{-1}W \xrightarrow{g} W$$

Ancora, la funzione tau può essere calcolata come determinante di una mappa $H_- \to H_-$. Sempre sotto l'ipotesi che W sia trasverso, denotiamo $\ell_W \colon H \to H_-$ la *proiezione su H_- parallela a W*, ovvero l'applicazione lineare definita da

$$f \mapsto \pi_-(f) - K(\pi_+(f))$$

Sussiste allora la seguente formula, dovuta a Dickey:

$$\tau_W(g) = \det \ell_W g = \det(\pi_- g - K\pi_+ g) \tag{92}$$

Per dimostrarlo faremo vedere che i seguenti determinanti di applicazioni $H_- \to H_-$ coincidono tra loro (e con $\tau_W(g)$):

$$\det(\pi_- g - K\pi_+ g) = \det(\mathrm{id}_{H_-} + Kg\pi_+ g^{-1}) \tag{93}$$

Cominciamo col calcolare la matrice associata a $\ell_W g$ nella base canonica $\{z^{-k}\}_{k>0}$ di H_-. Si ha

$$z^{-k} \mapsto \pi_-(gz^{-k}) - K(\pi_+(gz^{-k}))$$

ovvero, esprimendo g nelle coordinate $\boldsymbol{h}$,

$$z^{-k} \mapsto z^{-k} + h_1 z^{-k+1} + \cdots + h_{k-1}z^{-1} - K(h_k + h_{k-1}z + \dots)$$

Allora la matrice in questione si scrive

$$\begin{pmatrix} 1 & h_1 & h_2 & \dots \\ 0 & 1 & h_1 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} - K \cdot \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & h_3 & \dots \\ h_2 & h_3 & h_4 & \dots \\ h_3 & h_4 & h_5 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Operiamo su di essa nel seguente modo: alla j-esima colonna (per ogni $j > 1$) aggiungiamo le colonne per k che va da 1 a $j-1$, ciascuna moltiplicata per h^-_{j-k} (com'è noto, queste operazioni non cambiano il determinante). Otteniamo così la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & h_1 + h_1^- & h_2 + h_1^- h_1 + h_2^- & \dots \\ 0 & 1 & h_1 + h_1^- & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} - K \cdot \begin{pmatrix} h_1 & h_2 + h_1^- h_1 & h_3 + h_1^- h_2 + h_2^- h_1 & \dots \\ h_2 & h_3 + h_1^- h_2 & h_4 + h_1^- h_3 + h_2^- h_2 & \dots \\ h_3 & h_4 + h_1^- h_3 & h_5 + h_1^- h_4 + h_2^- h_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Ma stanti le relazioni (22) tra i coefficienti $\boldsymbol{h}$ e $\boldsymbol{h}^-$ tale matrice coincide con

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} + K \cdot \begin{pmatrix} h_1 & h_2^- & h_3^- & \dots \\ h_2^- + h_1 h_1^- & h_3^- + h_1 h_2^- & h_4^- + h_1 h_3^- & \dots \\ h_3^- + h_1 h_2^- + h_2 h_1^- & h_4^- + h_1 h_3^- + h_2 h_2^- & h_5^- + h_1 h_4^- + h_2 h_3^- & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Ne segue che il determinante cercato coincide con quello della matrice

$$\delta_{ik} - K_{ij} M_{jk} \qquad \text{dove } M_{jk} := h^-_{j+k-1} + \sum_{\ell=1}^{j-1} h_{j-\ell} h^-_{k+\ell-1} \tag{94}$$

Consideriamo ora l'applicazione $\mathrm{id}_{H_-} + K g \pi_+ g^{-1}$. Per calcolare la sua matrice associata nella solita base notiamo che risulta

$$g\pi_+(g^{-1} z^{-k}) = (1 + h_1 z + h_2 z^2 + \dots)(h_k^- + h_{k+1}^- z + h_{k+2}^- z^2 + \dots)$$

e dunque

$$z^{-k} \mapsto z^{-k} + K(g\pi_+(g^{-1} z^{-k})) = z^{-k} + K(h_k^- + (h_1 h_k^- + h_{k+1}^-) z + \dots)$$

ovvero la matrice in questione è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} + K \cdot \begin{pmatrix} h_1^- & h_2^- & h_3^- & \dots \\ h_1 h_1^- + h_2^- & h_1 h_2^- + h_3^- & h_1 h_3^- + h_4^- & \dots \\ h_2 h_1^- + h_1 h_2^- + h_3^- & h_2 h_2^- + h_1 h_3^- + h_4^- & h_2 h_3^- + h_1 h_4^- + h_5^- & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

che è esattamente la (94); ciò dimostra l'uguaglianza (93).

Infine, dimostriamo che $\det(\mathrm{id}_{H_-} + K g \pi_+ g^{-1})$ coincide con $\tau_W(g)$. Ricordiamo che quest'ultimo è il determinante dell'applicazione

$$f \mapsto f + g\pi_+(g^{-1} K(f))$$

che è del tipo $\mathrm{id}_{H_+} + T$, con $T := g\pi_+ g^{-1} K$ di classe traccia. Se scriviamo il risultato di $K(f)$ sulla base z^{-k} di H_- e definiamo $f_k := g\pi_+(g^{-1} z^{-k})$ per ogni $k > 0$, allora l'immagine di T sarà contenuta nel sottospazio lineare generato da $\{f_k\}_{k>0}$. Ne segue che il determinante di $\mathrm{id}_{H_+} + T$ può essere calcolato restringendosi a questo sottospazio. Basta quindi calcolare il determinante della matrice associata a $\mathrm{id}_{H_+} + T$ rispetto alla base $\{f_k\}$. Ora,

$$(\mathrm{id}_{H_+} + T)(f_k) = f_k + g\pi_+(g^{-1} K(f_k))$$

D'altro canto $K(f_k) \in H_-$ e dunque sarà $K(f_k) = \sum_{i>0} K(f_k)_i z^{-i}$, da cui

$$= f_k + g\pi_+(g^{-1} \sum_{i>0} K(f_k)_i z^{-i}) = f_k + \sum_{i>0} K(f_k)_i g\pi_+(g^{-1} z^{-i}) = f_k + \sum_{i>0} K(f_k)_i f_i$$

In altri termini la matrice di cui cerchiamo il determinante non è altro che $\delta_{ik} + K(f_k)_i$. Ma ricordando la definizione degli f_k, questa è proprio la matrice associata all'applicazione $H_- \to H_-$ data da

$$f \mapsto f + Kg\pi_+ g^{-1}$$

come richiesto.

§3. Funzione tau e funzioni di Schur. Vogliamo ora dimostrare che la funzione tau di $W \in \mathrm{Gr}$, espressa nelle coordinate che abbiamo chiamato $\boldsymbol{h}^-$, è data da una combinazione lineare (in generale infinita) di funzioni di Schur. Sia $\{h_k\}_{k\geq 1}$ una famiglia numerabile di variabili indipendenti; la *funzione di Schur associata alla partizione* λ si scrive

$$s_\lambda(\boldsymbol{h}) = \det(h_{\lambda_i - i + j})$$

con gli indici i e j che variano in $\mathbb{N}$ o, equivalentemente, da 0 a un qualunque n maggiore o uguale alla lunghezza di λ. Se $\lambda = \lambda(S)$ con $S \in \mathscr{S}_0$ allora $\lambda_i = i - s_i$ e dunque

$$s_{\lambda(S)}(\boldsymbol{h}) = \det \begin{pmatrix} h_{-s_0} & h_{-s_0+1} & h_{-s_0+2} & \cdots \\ h_{-s_1} & h_{-s_1+1} & h_{-s_1+2} & \cdots \\ h_{-s_2} & h_{-s_2+1} & h_{-s_2+2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Equivalentemente, $s_{\lambda(S)}(\boldsymbol{h})$ è il determinante della matrice che si ottiene prendendo le righe individuate dagli elementi di S della matrice $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ data da

$$\Xi := (h_{p-q})_{q\in\mathbb{Z},\, p\in\mathbb{N}} = \left(\begin{array}{cccc} \vdots & \vdots & \vdots & \\ h_3 & h_4 & h_5 & \cdots \\ h_2 & h_3 & h_4 & \cdots \\ h_1 & h_2 & h_3 & \cdots \\ \hline 1 & h_1 & h_2 & \cdots \\ 0 & 1 & h_1 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}\right)$$

Se la partizione $\lambda(S)$ ha n parti non nulle allora la matrice Ξ_S così ottenuta è del tipo $\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ 0 & D \end{smallmatrix}\right)$ con D unitriangolare superiore e A matrice $n \times n$; in tal caso $\det \Xi_S = \det A$.

Proposizione 45. Per ogni $S \in \mathscr{S}_0$ risulta

$$\tau_{H_S}(g) = s_{\lambda(S)}(\boldsymbol{h}^-)$$

Dimostrazione. Se $S = \{s_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ allora $w_i := z^{s_i}$ è una base ammissibile per H_S. La mappa $(a, b) : H \to H_+$ associata a g^{-1} è semplicemente $f \mapsto \pi_+(g^{-1}f)$; allora nelle coordinate $\boldsymbol{h}^-$ la matrice associata alla mappa $aw_+ + bw_- \colon H_+ \to H_+$ è

$$(h_{j-s_i}) = (h_{(i-s_i)-i+j})$$

al variare di $i, j \in \mathbb{N}$. Siccome $s_i = i$ per i sufficientemente grande, questa matrice è unitriangolare superiore tranne che per un blocco finito nell'angolo in alto a sinistra. La matrice della mappa $a\colon H_+ \to H_+$ è unitriangolare superiore, quindi

$$\det(w_+ + a^{-1}bw_-) = \det a^{-1}(aw_+ + bw_-)$$

è uguale al determinante del blocco finito. $\square$

Proposizione 46. Preso $W \in \mathrm{Gr}$ e w una qualunque base ammissibile per W, risulta

$$\tau_W(g) = \sum_{S \in \mathscr{S}_0} \Pi_S(w) s_{\lambda(S)}(\boldsymbol{h}) \tag{95}$$

La precedente ci dà la funzione tau espressa nelle coordinate $\boldsymbol{h}^-$, legate alle $\boldsymbol{t}$ dalle relazioni (23). Ricordiamo che W ha un numero finito di coordinate di Plücker non nulle se e solo se appartiene a Gr_0; in tal caso, e solo in tal caso, τ_W è un polinomio in un numero finito di variabili.

§4. La formula di Sato per la funzione di Baker. Per ogni $\zeta \in \mathbb{C}$ definiamo l'applicazione $q_\zeta\colon P^1_{\mathbb{C}} \to P^1_{\mathbb{C}}$ mediante la posizione

$$q_\zeta(z) := 1 - \frac{z}{\zeta}$$

Si noti che $q_\zeta \in \Gamma_+(R)$ ogni qualvolta $|\zeta| > R$.

Proposizione 47. Per ogni $g \in \Gamma_+^W(R)$ risulta

$$\tilde{\psi}_W(g, \zeta) = \frac{\tau_W(gq_\zeta)}{\tau_W(g)} \tag{96}$$

La (96) si dice la **formula di Sato** per la funzione di Baker (ridotta). Essa va interpretata come segue: è evidente che a $g \in \Gamma_+^W$ fissato la funzione $z \mapsto \tilde{\psi}_W(g, z)$, coinvolgendo solo potenze negative di z, si estende a funzione olomorfa nel disco $D_\infty(R)$. La (96) ci dice allora che, *nell'interno di tale disco* (per cui $q_\zeta \in \Gamma_+(R)$), essa coincide con il rapporto tra le due funzioni tau indicate; allora per continuità la formula sussiste anche su $S^1(R)$.

Dimostrazione. Usando la proposizione 44 abbiamo che $\tau_W(gq_\zeta) = \tau_{g^{-1}W}(q_\zeta)\tau_W(g)$, da cui

$$\frac{\tau_W(gq_\zeta)}{\tau_W(g)} = \tau_{g^{-1}W}(q_\zeta)$$

D'altro canto la funzione $\zeta \mapsto \tilde{\psi}_W(g, \zeta)$ che compare nel membro sinistro della (96) è caratterizzata dal fatto di essere l'unica funzione della forma $1 + \sum_{i \geq 1} a_i \zeta^{-i}$ la cui restrizione a $S^1(R)$ appartiene al sottospazio trasverso $g^{-1}W$; la tesi segue allora applicando il seguente lemma a $g^{-1}W$. $\square$

Proposizione 48. Dato $W \in \mathrm{Gr}$ trasverso e detto f_0 l'unico elemento di H_- tale che $1 + f_0 \in W$, per $|\zeta| > R$ risulta

$$\tau_W(q_\zeta) = 1 + f_0(\zeta)$$

Dimostrazione. Scritto $q_\zeta^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)$, l'applicazione $b\colon H_- \to H_+$ manda z^{-k} in $\zeta^{-k} q_\zeta^{-1}$; quindi $a^{-1}b$ è la mappa di rango uno che manda $f \in H_-$ nella funzione costante $f(\zeta)$. La mappa $a^{-1}bA$ è quindi a sua volta di rango uno, e

$$\tau_W(q_\zeta) = \det(1 + a^{-1}bA) = 1 + \mathrm{Tr}(a^{-1}bA)$$

Ma A manda 1 in $f_0(z)$, da cui la tesi. $\square$

Se ora scriviamo $g = \mathrm{e}^{\xi(\boldsymbol{t},z)}$ e, usando la serie di Mercatore,

$$q_\zeta(z) = \mathrm{e}^{\log(1-\frac{z}{\zeta})} = \mathrm{e}^{-\sum_{k\geq 1} \frac{z^k}{k\zeta^k}}$$

allora risulta

$$g q_\zeta = \mathrm{e}^{\sum_{k\geq 1}\left(t_k - \frac{1}{k\zeta^k}\right)z^k}$$

Definiamo lo **shift di Miwa** sulle coordinate $\boldsymbol{t}$ come

$$\boldsymbol{t} - [\zeta^{-1}] := \{t_k - \frac{1}{k\zeta^k}\}_{k\geq 1} = \{x - \frac{1}{\zeta}, t_2 - \frac{1}{2\zeta^2}, t_3 - \frac{1}{3\zeta^3}, \dots\}$$

allora la (96) si legge

$$\tilde{\psi}_W(\boldsymbol{t}, \zeta) = \frac{\tau_W(\boldsymbol{t} - [\zeta^{-1}])}{\tau_W(\boldsymbol{t})} \tag{97}$$

Espandiamo il numeratore della (97) in serie di Taylor per $\zeta = \infty$. Introdotta la variabile $\omega = \frac{1}{\zeta}$ risulta

$$\tau_W(\boldsymbol{t} - [\omega]) = \tau_W(x - \omega, t_2 - \frac{1}{2}\omega^2, t_3 - \frac{1}{3}\omega^3, \dots)$$

da cui (sopprimendo l'argomento delle funzioni tau per brevità)

$$\frac{\partial}{\partial \omega}\tau_W(\boldsymbol{t} - [\omega]) = \sum_{k\geq 1} \frac{\partial \tau}{\partial t_k}(-\omega^{k-1}) = -\frac{\partial \tau}{\partial x} - \frac{\partial \tau}{\partial t_2}\omega - \frac{\partial \tau}{\partial t_3}\omega^2 - \dots$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial \omega^2}\tau_W(\boldsymbol{t} - [\omega]) &= \sum_{k\geq 1}\left(\frac{\partial}{\partial t_k}\frac{\partial \tau}{\partial \omega}(-\omega^{k-1}) + \frac{\partial \tau}{\partial t_k}(-(k-1)\omega^{k-2})\right) = \\
&= \sum_{k_1,k_2\geq 1} \frac{\partial^2 \tau}{\partial t_{k_1}\partial t_{k_2}}\omega^{k_1+k_2-2} + \sum_{k_1\geq 1}\frac{\partial \tau}{\partial t_{k_1}}(-(k_1-1)\omega^{k_1-2}) = \\
&= \left(\frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} - \frac{\partial \tau}{\partial t_2}\right) + \left(2\frac{\partial^2 \tau}{\partial x \partial t_2} - 2\frac{\partial \tau}{\partial t_3}\right)\omega + \dots
\end{aligned}$$

e così via. In definitiva

$$\tau_W(\boldsymbol{t}-[\omega]) = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} \left.\frac{\partial^k \tau(\boldsymbol{t}-[\omega])}{\partial \omega^k}\right|_0 \omega^k = \tau(\boldsymbol{t}) - \frac{\partial \tau(\boldsymbol{t})}{\partial x}\omega + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \tau(\boldsymbol{t})}{\partial x^2} - \frac{\partial \tau(\boldsymbol{t})}{\partial t_2}\right)\omega^2 + \dots$$

da cui, dividendo per $\tau(\boldsymbol{t})$, si può leggere l'espressione esplicita dei coefficienti a_i della funzione di Baker ridotta in termini della funzione tau:

$$a_1(\boldsymbol{t}) = -\frac{1}{\tau(\boldsymbol{t})}\frac{\partial \tau(\boldsymbol{t})}{\partial x} \qquad a_2 = \frac{1}{2\tau(\boldsymbol{t})}\left(\frac{\partial^2 \tau(\boldsymbol{t})}{\partial x^2} - \frac{\partial \tau(\boldsymbol{t})}{\partial t_2}\right) \qquad \dots$$

In generale, tali espressioni saranno della forma

$$a_i = \frac{P_i(\tau)}{\tau} \tag{98}$$

per opportuni opportuni operatori differenziali P_i polinomiali in $\partial_1, \dots, \partial_i$ a coefficienti costanti. In particolare l'operatore ∂_i figura sempre in un singolo addendo del tipo $-\frac{1}{i}\partial_i$, per cui si può scrivere

$$a_i = -\frac{1}{i}\partial_i \log\tau + \frac{\tilde{P}_i(\tau)}{\tau} \tag{99}$$

con $\tilde{P}_i$ polinomio a coefficienti costanti negli operatori $\partial_1, \dots, \partial_{i-1}$.

Ne segue, come promesso in §6, che:

Proposizione 49. Per ogni $W \in \mathrm{Gr}(R)$ i coefficienti della funzione di Baker ridotta $\tilde{\psi}_W$ sono funzioni meromorfe delle coordinate $\boldsymbol{t}$ su $\Gamma_+(R)$.

Lo stesso risultato sussiste ovviamente per i coefficienti del corrispondente operatore Q_W, visto che essi si possono esprimere come polinomi differenziali negli a_i come da formula (49). In particolare sostituendo in quest'ultima le espressioni (99) è possibile esprimere i coefficienti q_i direttamente in termini della funzione tau; si ottengono così formule del tipo

$$q_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\log\tau_W$$

$$q_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial t_2}\log\tau - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\tau}\frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2}\right)\right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\log\tau\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\log\tau\right)$$

e così via.

Fissiamo ora i valori di tutte le coordinate $\boldsymbol{t}_{>1}$ a delle costanti e consideriamo a_i come funzioni meromorfe dell'unica variabile x. Allora sussiste la seguente:

Proposizione 50. I poli della funzione $a_i(x)$ hanno ordine al più i.

Si noti che nel caso $i = 1$ questo segue subito dalla (99) e dall'analicità di τ in virtù delle proprietà delle derivate logaritmiche[7], ma così non è per i coefficienti successivi.

L'ingrediente fondamentale della dimostrazione dell'affermazione precedente è che la restrizione della funzione tau al sottogruppo a un parametro e^{xz} di Γ_+ non può essere identicamente nulla. Più precisamente:

[7]Se f è meromorfa allora le singolarità della sua derivata logaritmica sono poli semplici con residuo n dove f ha uno zero di ordine n e $-n$ dove f ha un polo di ordine n.

Proposizione 51. Per ogni $W \in \mathrm{Gr}$ risulta $\tau_W(x, \mathbf{0}) = cx^\ell + T$ dove $c \neq 0$, ℓ è la codimensione dello strato che contiene W e T contiene solo termini di ordine superiore a ℓ in x.

In particolare questo dimostra che la funzione τ non si annulla identicamente; da questo segue (come promesso) che per ogni $W \in \mathrm{Gr}$ l'insieme Γ_+^W, in quanto complementare dell'insieme degli zeri della funzione olomorfa τ_W, è un aperto denso in Γ_+.

Dimostrazione. Usiamo l'espansione di τ in termini di funzioni di Schur. Consideriamo anzitutto $s_{\lambda(S)}$ quando $\boldsymbol{t}_{>1} = 0$. Siccome $s_{\lambda(S)}$ è un polinomio omogeneo di peso $|S|$ nelle t_i risulta

$$s_{\lambda(S)}(x, 0, \dots) = d_S x^{|S|}$$

dove d_S è un numero razionale non nullo[8]. Ora, abbiamo visto che per ogni W esiste S di peso minimale ℓ tale che le coordinate di Plüker w^S non sono nulle; questo S è l'indice dello strato che contiene W. Allora nell'espansione (95) tutti i termini hanno peso come minimo ℓ, e i termini di peso minimo ℓ formano un multiplo di una singola funzione di Schur. Ne segue la tesi. $\square$

Dimostriamo ora la proposizione 50. Sostituendo W se necessario con gW per un opportuno $g \in \Gamma_+$ basta considerare il caso in cui il polo è nell'origine. Ora, P_i è il coefficiente di z^{-i} nell'espansione di

$$\mathrm{e}^{-\sum_{r \geq 1} \frac{1}{r} z^{-r} \frac{\partial}{\partial t_r}}$$

Ne segue che l'operatore P_i abbassa il peso di i; dunque nell'espansione in serie di $P_i \tau$ solo termini di peso almeno $\ell - i$ possono comparire. Quindi se poniamo $\boldsymbol{t} = 0$ nel numeratore, la più bassa potenza di $x = t_1$ che può comparire è $t_1^{\ell - i}$ (un termine che coinvolge una potenza più bassa coinvolge anche un t_k, e quindi si annulla). Usando il lemma si ottiene la tesi. Si ottiene anche che l'ordine di ciascun polo di ciascun a_i non può essere superiore a ℓ.

Come corollario dei discorsi precedenti otteniamo che:

Proposizione 52. Per ogni $W \in \mathrm{Gr}^{(n)}$ il corrispondente operatore differenziale $L_W \in \mathscr{C}^{(n)}$ ha solo singolarità regolari nei punti al finito; più precisamente il coefficiente u_i di D^i ha poli di ordine al più $n - i$.

Dimostrazione. Basta ricordare che $L_W = \phi D^n \phi^{-1}$, quindi se diamo a $a_k^{(j)}$ peso $k + j$ abbiamo che u_i è un polinomio differenziale omogeneo negli a_k di peso $n - i$, e la tesi segue allora dalla proposizione 50. $\square$

[8] Esso coincide con $(-1)^{|S|}/h(\lambda(S))$, dove $h(\lambda(S)) \in \mathbb{N}^*$ è il prodotto delle *lunghezze di gancio* della partizione $\lambda(S)$; vedi [Mac95, pag. 37].

4 La grassmanniana adelica

§1. La grassmanniana razionale. Nel seguito denotiamo con $\mathcal{R}$ lo spazio delle funzioni razionali sulla sfera di Riemann, con $\mathcal{P}$ il sottospazio dei polinomi e con $\mathcal{R}_-$ il sottospazio delle funzioni razionali che si annullano nel punto all'infinito; allora i familiari risultati sulla divisione di polinomi ci danno la decomposizione in somma diretta

$$\mathcal{R} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{R}_-$$

Definizione 16. L'insieme dei sottospazi lineari chiusi $W \subseteq \mathcal{R}$ per cui esistono $p, q \in \mathcal{P}$ tali che

$$p\mathcal{P} \subseteq W \subseteq q^{-1}\mathcal{P} \tag{100}$$

si denota $\overline{\mathrm{Gr}}^{\mathrm{rat}}$ e si dice la **grassmanniana razionale**.

Equivalentemente possiamo richiedere che esista un singolo polinomio $p \in \mathcal{P}$ tale che $p\mathcal{P} \subseteq W \subseteq p^{-1}\mathcal{P}$: infatti se W soddisfa la (100) e m è il minimo comune multiplo di p e q risulta

$$m\mathcal{P} \subseteq p\mathcal{P} \subseteq W \subseteq q^{-1}\mathcal{P} \subseteq m^{-1}\mathcal{P}$$

Dobbiamo ora chiarire quale relazione c'è tra $\overline{\mathrm{Gr}}^{\mathrm{rat}}$ e la grassmanniana di Segal-Wilson studiata nella sezione 1. Ricordiamo che quest'ultima è stata identificata, subordinatamente alla scelta di un reale positivo $R \in \mathbb{R}^+$, con una certa classe di sottospazi lineari di funzioni a quadrato integrabile sulla circonferenza $\{|z| = R\} \subseteq P^1_{\mathbb{C}}$ a valori in $\mathbb{C}$.

Supponiamo che siano dati *due* reali positivi $r, R \in \mathbb{R}^+$ con $r < R$; allora si può definire un'immersione canonica di $\overline{\mathrm{Gr}}(r)$ in $\overline{\mathrm{Gr}}(R)$ come segue. Dato $W \in \overline{\mathrm{Gr}}(r)$ i suoi elementi di ordine finito (cioè gli elementi di W^{alg}) si estendono a funzioni olomorfe in $D_\infty(r) \setminus \{\infty\}$, quindi sono definiti in particolare sulla circonferenza di raggio maggiore $S^1(R)$; resta così individuato un sottospazio di $L^2(S^1(R), \mathbb{C})$, e prendendone la chiusura in L^2 si ottiene per costruzione un elemento di $\overline{\mathrm{Gr}}(R)$. La mappa $\overline{\mathrm{Gr}}(r) \to \overline{\mathrm{Gr}}(R)$ così ottenuta è un'embedding continuo con immagine densa. Possiamo allora considerare il seguente limite induttivo (nella categoria delle varietà di Banach):

$$\overline{\mathrm{Gr}} := \varinjlim_{R \in \mathbb{R}^+} \overline{\mathrm{Gr}}(R)$$

in cui le immersioni sono quelle costruite in precedenza. Si ottiene così una varietà di Banach $\overline{\mathrm{Gr}}$ tale che per ogni $W \in \overline{\mathrm{Gr}}$ esiste $R \in \mathbb{R}^+$ tale che $W \in \overline{\mathrm{Gr}}(R)$. Tutte le costruzioni sviluppate nella sezione 1 e valide per ogni $\overline{\mathrm{Gr}}(R)$ al variare di $R \in \mathbb{R}^+$ sono naturalmente valide in $\overline{\mathrm{Gr}}$: ad esempio per quanto riguarda l'azione del gruppo Γ abbiamo che ciascun operatore $g \in \Gamma$ definisce un'azione su ciascuna grassmanniana $\overline{\mathrm{Gr}}(R)$ e tale azione è compatibile con l'immersione di $\overline{\mathrm{Gr}}(r)$ in $\overline{\mathrm{Gr}}(R)$; ne segue che Γ agisce su $\overline{\mathrm{Gr}}$ secondo le modalità già viste.

Sia dato ora $W \in \overline{\mathrm{Gr}}^{\mathrm{rat}}$ e si prenda $R \in \mathbb{R}^+$ tale che tutte le radici del polinomio q che compare nella (100) siano comprese nel disco $|z| < R$. Allora per ogni $f \in W$ la restrizione $f|_{S^1(R)}$ è un'applicazione $S^1(R) \to \mathbb{C}$ continua, quindi a quadrato integrabile. In questo modo W definisce un sottospazio di $L^2(S^1(R), \mathbb{C})$ la cui chiusura in L^2, chiamiamola $\overline{W}$, è tale che $pH_+ \subseteq \overline{W} \subseteq q^{-1}H_+$, e quindi appartiene a $\overline{\mathrm{Gr}}_{\mathrm{rk1}}(R) \subseteq \overline{\mathrm{Gr}}(R)$. Viceversa se $W \in \overline{\mathrm{Gr}}_{\mathrm{rk1}}(R)$ (con $R \in \mathbb{R}^+$ qualunque) allora W^{alg} è un sottospazio di $\mathcal{R}$ che appartiene a $\overline{\mathrm{Gr}}^{\mathrm{rat}}$ per definizione (in effetti esso coincide con $W \cap \mathcal{R}$). Ne segue che la sottograssmanniana che abbiamo denotato $\overline{\mathrm{Gr}}_{\mathrm{rk1}}(R)$ è in corrispondenza biunivoca con gli elementi di $\overline{\mathrm{Gr}}^{\mathrm{rat}}$ per cui il polinomio q non possiede radici al di fuori del disco di raggio R. D'altro canto la famiglia di sottograssmanniane $\overline{\mathrm{Gr}}_{\mathrm{rk1}}(R)$ al variare di $R \in \mathbb{R}^+$ definisce una sottograssmanniana[9] $\overline{\mathrm{Gr}}_{\mathrm{rk1}}$ in $\overline{\mathrm{Gr}}$, che risulta quindi in corrispondenza biunivoca con $\overline{\mathrm{Gr}}^{\mathrm{rat}}$. Possiamo usare questa identificazione per trasferire su $\overline{\mathrm{Gr}}^{\mathrm{rat}}$ la topologia definita naturalmente su $\overline{\mathrm{Gr}}_{\mathrm{rk1}}$ (che è il limite induttivo delle topologie ereditate da ciascuna $\overline{\mathrm{Gr}}_{\mathrm{rk1}}(R)$ come sottoinsieme di $\overline{\mathrm{Gr}}(R)$).

Stabiliamo ora la dimensione virtuale di un sottospazio $W \in \overline{\mathrm{Gr}}^{\mathrm{rat}}$. Notiamo anzitutto che per la (100) possiamo scrivere $W = W' \oplus p\mathcal{P}$ con W' di dimensione finita; chiaramente la proiezione ortogonale $p_+ \colon W \to \mathcal{P}$ agisce come l'identità sul secondo addendo diretto e quindi $\ker p_+ = \ker p'_+$ dove abbiamo definito $p'_+ := p_+|_{W'}$. Scrivendo similmente $\mathcal{P} = U \oplus p\mathcal{P}$ (con $\dim U = \deg p$) e notando che $\operatorname{im} p_+$ contiene il secondo addendo diretto abbiamo

$$\operatorname{coker} p_+ = \frac{U \oplus p\mathcal{P}}{\operatorname{im} p_+} \cong \frac{U}{\operatorname{im} p'_+}$$

che è un quoziente tra spazi finito-dimensionali, per cui è semplicemente $\dim \operatorname{coker} p_+ = \deg p - \dim \operatorname{im} p'_+$. Ne concludiamo, con il teorema di nullità più rango, che

$$\operatorname{vdim} W = \dim \ker p'_+ - (\deg p - \dim \operatorname{im} p'_+) = \dim W' - \deg p \tag{101}$$

Come usuale, denotiamo $\mathrm{Gr}^{\mathrm{rat}}$ la componente connessa di $\overline{\mathrm{Gr}}^{\mathrm{rat}}$ formata dai sottospazi di dimensione virtuale zero.

Proposizione 53. Un sottospazio $W \in \overline{\mathrm{Gr}}^{\mathrm{rat}}$ appartiene a $\mathrm{Gr}^{\mathrm{rat}}$ se e solo se la codimensione dell'inclusione $W \subseteq q^{-1}\mathcal{P}$ coincide con il grado di q.

Dimostrazione. La (100) equivale al dire che $qp\mathcal{P} \subseteq qW \subseteq \mathcal{P}$, dunque

$$\operatorname{codim}_{q^{-1}\mathcal{P}} W = \operatorname{codim}_{\mathcal{P}} qW = \dim \frac{\mathcal{P}}{qW}$$

Se ora quozientiamo sopra e sotto per il sottospazio comune $qp\mathcal{P}$ otteniamo uno spazio lineare isomorfo al precedente che in più è il quoziente di due spazi manifestamente

[9]Più precisamente, dati $r, R \in \mathbb{R}^+$ con $r < R$ c'è un'ovvia inclusione $\overline{\mathrm{Gr}}_{\mathrm{rk1}}(r) \to \overline{\mathrm{Gr}}_{\mathrm{rk1}}(R)$ e il diagramma

$$\begin{tikzcd} \overline{\mathrm{Gr}}_{\mathrm{rk1}}(r) \arrow[r] \arrow[d] & \overline{\mathrm{Gr}}_{\mathrm{rk1}}(R) \arrow[d] \\ \overline{\mathrm{Gr}}(r) \arrow[r] & \overline{\mathrm{Gr}}(R) \end{tikzcd}$$

(in cui le frecce verticali sono le inclusioni canoniche) commuta; ne segue l'esistenza di $\overline{\mathrm{Gr}}_{\mathrm{rk1}} \subseteq \overline{\mathrm{Gr}}$.

finito-dimensionali:

$$\frac{\mathcal{P}}{qW} \cong \frac{\mathcal{P}/qp\mathcal{P}}{qW/qp\mathcal{P}}$$

essendo inoltre $qW/qp\mathcal{P} \cong W/p\mathcal{P} = W'$. Se ne conclude che la codimensione cercata è (usando la (101))

$$\deg q + \deg p - \dim W' = \deg q - \operatorname{vdim} W$$

ovvero $\operatorname{vdim} W = \deg q - \operatorname{codim}_{q^{-1}\mathcal{P}} W$, da cui la tesi. □

Allora a ogni punto di $\mathrm{Gr}^{\mathrm{rat}}$ si associa una funzione di Baker e una funzione tau secondo gli algoritmi già visti (e le calcoleremo esplicitamente tra breve).

§2. Descrizione duale. Vogliamo ora ottenere una descrizione più concreta dei sottospazi di $\mathrm{Gr}^{\mathrm{rat}}$. A tale scopo sia nuovamente $\mathcal{P}$ lo spazio dei polinomi a coefficienti complessi; il suo duale algebrico $\mathcal{P}^*$ si identifica con $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ (spazio lineare delle successioni di numeri complessi) con il pairing definito come segue: preso $p = \{p_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{P}$ e $\varphi = \{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{P}^*$ si ha

$$\langle \varphi, p\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n p_n$$

dove la somma ha senso proprio perchè p è un polinomio (cioè ha solo un numero finito di elementi non nulli). Consideriamo la famiglia di funzionali $\mathcal{E} = \{\mathrm{ev}_\lambda^r\}_{r\in\mathbb{N},\,\lambda\in\mathbb{C}}$ definiti come segue:

$$\langle \mathrm{ev}_\lambda^r, p\rangle = p^{(r)}(\lambda)$$

dove $p^{(r)}$ è la r-esima derivata di p. Esplicitamente, $p^{(r)} = \{(r+n)^{\underline{r}} p_{r+n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ e quindi

$$\langle \mathrm{ev}_\lambda^r, p\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} (r+n)^{\underline{r}} p_{r+n}\lambda^n$$

o in altri termini ev_λ^r è il funzionale su $\mathcal{P}$ di componenti

$$(\mathrm{ev}_\lambda^r)_n = \begin{cases} 0 & \text{per } n < r \\ n^{\underline{r}}\lambda^{n-r} & \text{per } n \geq r \end{cases}$$

Affermiamo che l'insieme di funzionali $\mathcal{E}$ è linearmente indipendente. Infatti supponiamo che sia $\alpha := \alpha_1 \mathrm{ev}_{\lambda_1}^{r_1} + \cdots + \alpha_n \mathrm{ev}_{\lambda_n}^{r_n} = 0$ per qualche n-upla di numeri complessi $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ non tutti nulli, allora deve essere $\alpha(p) = \alpha_1 p^{(r_1)}(\lambda_1) + \cdots + \alpha_n p^{(r_n)}(\lambda_n) = 0$ per ogni $p \in \mathcal{P}$. Ma questo è impossibile; per vederlo si considerino i polinomi $p_k := z^k$ per $0 \leq k \leq n$, applicandogli α si ottiene la famiglia di identità

$$\alpha_1 k^{\underline{r_1}}\lambda_1^{k-r_1} + \cdots + \alpha_n k^{\underline{r_n}}\lambda_n^{k-r_n} = 0$$

che può essere letta come un sistema lineare di $n+1$ equazioni nelle n incognite $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, che quindi ammette solo la soluzione nulla.

Definizione 17. Indichiamo con $\mathscr{C}$ il sottospazio lineare di $\mathcal{P}^*$ generato da $\mathcal{E}$.

Allora $\mathcal{E}$ è una base per $\mathscr{C}$; penseremo a quest'ultimo come a uno "spazio di condizioni differenziali" da imporre sui polinomi.

Per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$ definiamo

$$\mathscr{C}_\lambda := \operatorname{span}\{\operatorname{ev}_\lambda^r\}_{r\in\mathbb{N}}$$

Allora chiaramente $\mathscr{C} = \bigoplus_{\lambda\in\mathbb{C}} \mathscr{C}_\lambda$. Su ciascun $\mathscr{C}_\lambda$ si può introdurre una stratificazione come segue: per ogni $r \in \mathbb{N}$ definiamo

$$\mathscr{C}_\lambda^r := \operatorname{span}\{\operatorname{ev}_\lambda^s\}_{0\leq s<r}$$

con la convenzione $\mathscr{C}_\lambda^0 = \{0\}$.

Notiamo che $\frac{1}{r!}\operatorname{ev}_0^r$ si identifica con il funzionale "estrazione di r-esima componente"; ne segue che come spazi lineari risulta $\mathscr{C}_0 \cong \mathbb{C}^\infty \cong \mathcal{P}$. Chiaramente $\mathscr{C}_\lambda \cong \mathscr{C}_0$ per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$, quindi il nostro spazio di condizioni $\mathscr{C}$ si identifica con la somma diretta di un numero infinito (con la cardinalità del continuo) di copie di $\mathcal{P}$.

Definizione 18. Per ogni $c \in \mathscr{C}$ l'insieme (finito) di punti $\lambda \in \mathbb{C}$ tale che la proiezione di c su $\mathscr{C}_\lambda$ è non nulla si dice il **supporto** della condizione c.

Sia C un qualunque sottospazio finito-dimensionale di $\mathscr{C}$, allora ad esso si associa il suo annullatore in $\mathcal{P}$:

$$V_C := \{\, p \in \mathcal{P} \mid \langle c, p\rangle = 0 \text{ per ogni } c \in C \,\}$$

Similmente ad ogni sottospazio $V \subseteq \mathcal{P}$ possiamo associare il suo annullatore in $\mathscr{C}$:

$$\operatorname{Ann} V := \{\, c \in \mathscr{C} \mid \langle c, p\rangle = 0 \text{ per ogni } p \in V \,\}$$

Proposizione 54. Un sottospazio $W \subseteq \mathcal{R}$ appartiene a $\overline{\mathrm{Gr}}^{\mathrm{rat}}$ se e solo se esiste un sottospazio finito-dimensionale $C \subseteq \mathscr{C}$ e un polinomio q tale che $W = q^{-1}V_C$; inoltre $W \in \mathrm{Gr}^{\mathrm{rat}}$ se e solo se il polinomio q ha grado pari alla dimensione di C.

Dimostrazione. Dati C e q poniamo $W := q^{-1}V_C$. Sia $\{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}$ il supporto di C e per ciascun $i \in \{1, \dots, s\}$ sia r_i il massimo ordine di derivazione che figura nei funzionali $\operatorname{ev}_{r,\lambda_i}$ coinvolti negli elementi di C. Allora posto $p := \prod_{i=1}^s (z-\lambda_i)^{r_i+1}$ si ha che qualunque multiplo di p appartiene a V_C, dato che tutti gli elementi di C sono identicamente nulli su di essi. In particolare risulta $qp\mathcal{P} \subseteq V_C \subseteq \mathcal{P}$, ovvero

$$p\mathcal{P} \subseteq W \subseteq \frac{1}{q}\mathcal{P}$$

il che dimostra che $W \in \overline{\mathrm{Gr}}^{\mathrm{rat}}$. Supponiamo ora che sia $\deg q = \dim C$, per definizione è $\operatorname{codim}_{\mathcal{P}} V_C = \dim C = \deg q$ e la proposizione 53 ci dice allora che $W \in \mathrm{Gr}^{\mathrm{rat}}$.

Viceversa supponiamo dato $W \in \overline{\mathrm{Gr}}^{\mathrm{rat}}$, allora esistono $p, q \in \mathcal{P}$ tali che $qp\mathcal{P} \subseteq qW \subseteq \mathcal{P}$; ciò significa che il sottospazio lineare qW è definito da un numero finito di condizioni lineari nel duale di $\mathcal{P}/qp\mathcal{P}$, che si identifica con lo spazio U dei polinomi di grado minore di $\deg p + \deg q$, e quindi determina un sottospazio finito-dimensionale di

U^*. D'altro canto U^* è generato dagli elementi di $\mathscr{C}$, perchè come già notato quest'ultimo contiene tutti i funzionali estrazione di componente. Resta allora definito un sottospazio di dimensione finita $C \subseteq \mathscr{C}$ tale che $V_C = qW$, come richiesto. Supponiamo inoltre che sia $\operatorname{vdim} W = 0$, allora (come da (101)) lo spazio lineare $W' \cong qW/qp\mathcal{P}$ ha dimensione $\deg p$ e quindi è definito da $\deg p$ condizioni lineari in U^*, ne segue che il sottospazio C sopra costruito ha dimensione $\deg q$. □

Siccome $\mathbb{C}$ è un campo il polinomio q può sempre essere preso monico. Denotiamo $\mathrm{Gr}_{\mathrm{fin}}\mathscr{C}$ l'insieme dei sottospazi lineari finito-dimensionali di $\mathscr{C}$; alla luce della proposizione 54 è naturale dare la seguente

Definizione 19. L'insieme

$$\mathrm{Gr}^{\mathrm{rat}*} := \{ (C, q) \in \mathrm{Gr}_{\mathrm{fin}}\mathscr{C} \times \mathcal{P} \mid q \text{ monico di grado } \dim C \}$$

si dice la **grassmanniana razionale duale**.

Resta allora definita un'applicazione $\mathrm{Gr}^{\mathrm{rat}*} \to \mathrm{Gr}^{\mathrm{rat}}$ data da

$$(C, q)^* := q^{-1} V_C$$

Essa è surgettiva per costruzione ma non è iniettiva: per esempio tutte le coppie del tipo $(\mathscr{C}_0^n, z^n)$ al variare di $n \in \mathbb{N}$ vengono mandate in $\mathcal{P}$.

Ancora, ad ogni C finito-dimensionale si associa lo "stabilizzatore"

$$A_C := \{ f \in \mathcal{P} \mid fV_C \subseteq V_C \}$$

Essa è chiaramente una $\mathbb{C}$-sottoalgebra di $\mathcal{P}$; inoltre se p è il polinomio costruito nella dimostrazione della proposizione 54 allora qualunque multiplo di p soddisfa le condizioni di C, in particolare per ogni $v \in V_C$ risulta $pv \in V_C$ e quindi $p\mathcal{P} \subseteq A_C$, ovvero l'algebra A_C contiene polinomi di ogni grado sufficientemente alto. Questo significa che la mappa $\mathbb{C} \to \operatorname{Spec} A_C$ indotta dall'inclusione $A_C \subseteq \mathcal{P}$ esibisce $\operatorname{Spec} A_C$ come curva razionale ottenuta introducendo singolarità sulla retta affine. (Se $W = (C, q)^*$ allora A_C coincide con quella che nella sezione 1 avevamo chiamato A_W; in seguito useremo le due notazioni come sinonime.)

In §1.9 si è visto che su Gr agisce in maniera libera il gruppo Γ_-. Restringendosi a $\mathrm{Gr}^{\mathrm{rat}}$ il risultato continua a sussistere se si considera il sottogruppo di Γ_- formato dalle funzioni razionali, che in questa sede continuiamo a denotare Γ_-.

Proposizione 55. Due punti di $\mathrm{Gr}^{\mathrm{rat}*}$ con il medesimo sottospazio di condizioni C hanno immagine nella stessa Γ_--orbita di $\mathrm{Gr}^{\mathrm{rat}}$.

Dimostrazione. Siano dati (C, q_1) e $(C, q_2) \in \mathrm{Gr}^{\mathrm{rat}*}$ e siano W_1 e W_2 i corrispondenti elementi di $\mathrm{Gr}^{\mathrm{rat}}$; allora $\gamma := \frac{q_1}{q_2}$ è un quoziente tra polinomi monici del medesimo grado, cioè una funzione razionale che vale 1 nel punto all'infinito, ed evidentemente

$$\gamma W_1 = \frac{q_1}{q_2} \frac{1}{q_1} V_C = \frac{1}{q_2} V_C = W_2$$ □

Questo risultato ci permetterà, nel seguito, di ridurci spesso al caso in cui $q = z^m$.

§3. Funzione di Baker e funzione tau in $\mathrm{Gr}^{\mathrm{rat}}$**.** Dato un punto $(C,q) \in \mathrm{Gr}^{\mathrm{rat}*}$ è facile calcolare la funzione di Baker associata al corrispondente elemento di $\mathrm{Gr}^{\mathrm{rat}}$. Anzitutto notiamo che per la proposizione 55 è sufficiente considerare il caso in cui $q = z^m$, dato che per qualunque altra scelta di q si ottiene un sottospazio legato a $W = (C, z^m)^*$ da un elemento $\gamma \in \Gamma_-$ e la (74) ci dà allora la funzione di Baker associata al sottospazio γW. Operata questa scelta, affermiamo che la funzione di Baker di W deve essere della forma

$$\psi_W(\boldsymbol{t}, z) = (1 + a_1(\boldsymbol{t})z^{-1} + \cdots + a_m(\boldsymbol{t})z^{-m})\mathrm{e}^{\xi(\boldsymbol{t},z)}$$

in cui le a_i sono completamente determinate richiedendo che la funzione $z^m\psi_W(\boldsymbol{t}, z)$ soddisfi le condizioni differenziali di C identicamente nelle coordinate $\boldsymbol{t}$. Infatti sia D un disco che contiene tutti i (finiti) punti del supporto di C; allora per ciascun $\boldsymbol{t}$ fissato la funzione $z^m\psi_W(\boldsymbol{t}, z)$ appartiene alla chiusura di V_C in H_+, inoltre i funzionali ev_λ^r si estendono a loro volta in maniera unica a funzionali (continui) su H_+, quindi tutte le funzioni di $\overline{V_C}$ soddisfano le condizioni in C. Allora se $\{c_1, \ldots, c_m\}$ è una qualunque base per C possiamo considerare il sistema di equazioni lineari (nelle incognite a_i)

$$\langle c_j, (z^m + \sum_{i=1}^{m} a_i(\boldsymbol{t})z^{m-i})\mathrm{e}^{\xi(\boldsymbol{t},z)}\rangle = 0 \tag{102}$$

i cui coefficienti sono espressioni che coinvolgono oggetti del tipo $\partial_z^k \xi(\boldsymbol{t}, z)\Big|_{z=\lambda}$ $(k \in \mathbb{N})$ al variare di λ nel supporto di C. Questi si possono esprimere come funzioni razionali di g e delle sue derivate valutate in λ, infatti risulta

$$g = \mathrm{e}^{\xi(\boldsymbol{t},z)} \qquad g' = \mathrm{e}^{\xi(\boldsymbol{t},z)}\xi' \qquad g'' = \mathrm{e}^{\xi(\boldsymbol{t},z)}(\xi'^2 + \xi'')$$

da cui ad esempio

$$\xi' = \frac{g'}{g} \qquad \xi'' = \frac{g''}{g} - \left(\frac{g'}{g}\right)^2$$

e così via. Da notare che le derivate successive di g non sono altro che i polinomi differenziali di Faà di Bruno valutati su ξ'.

Esempio 5. Supponiamo che C sia generato dalla singola condizione $\langle c, p\rangle = p(\lambda) - \alpha p(\mu)$ con $\lambda \neq \mu$ e $\alpha \neq 0$. Scegliendo $q(z) = z$ il corrispondente sottospazio in $\mathrm{Gr}^{\mathrm{rat}}$ è

$$W = z^{-1}\{\, p \in \mathcal{P} \mid p(\lambda) = \alpha p(\mu) \,\}$$

Per determinare la funzione di Baker associata occorre imporre che l'espressione

$$(z + a_1(\boldsymbol{t}))\mathrm{e}^{\xi(\boldsymbol{t},z)} \tag{103}$$

soddisfi c, ovvero

$$(\lambda + a_1(\boldsymbol{t}))\mathrm{e}^{\xi(\boldsymbol{t},\lambda)} = \alpha(\mu + a_1(\boldsymbol{t}))\mathrm{e}^{\xi(\boldsymbol{t},\lambda)}$$

da cui

$$a_1(\boldsymbol{t}) = \frac{\alpha\mu \mathrm{e}^{\xi(\boldsymbol{t},\mu)} - \lambda \mathrm{e}^{\xi(\boldsymbol{t},\lambda)}}{\mathrm{e}^{\xi(\boldsymbol{t},\lambda)} - \alpha \mathrm{e}^{\xi(\boldsymbol{t},\mu)}}$$

per la funzione di Baker

$$\psi(g, z) = \left(1 + \frac{\alpha\mu g(\mu) - \lambda g(\lambda)}{g(\lambda) - \alpha g(\mu)} \frac{1}{z}\right) g(z)$$

Esempio 6. Supponiamo che C sia generato dalla singola condizione $\langle c, p\rangle = p'(\lambda) - \alpha p(\lambda)$ con $\alpha \neq 0$. Scegliendo $q(z) = z$ occorre imporre che l'espressione (103) e la sua derivata rispetto a z,

$$(1 + \xi'(\boldsymbol{t}, z)(z + a_1(\boldsymbol{t})))\mathrm{e}^{\xi(\boldsymbol{t},z)}$$

soddisfino c, ovvero

$$(1 + \xi'(\boldsymbol{t}, \lambda)(\lambda + a_1(\boldsymbol{t})) - \alpha(\lambda + a_1(\boldsymbol{t})))\mathrm{e}^{\xi(\boldsymbol{t},\lambda)} = 0$$

da cui

$$a_1(\boldsymbol{t}) = -\lambda - \frac{1}{\xi'(\boldsymbol{t}, \lambda) - \alpha}$$

per la funzione di Baker

$$\psi(g, z) = \left(1 - (\lambda + \frac{g(\lambda)}{g'(\lambda) - \alpha g(\lambda)})\frac{1}{z}\right) g(z)$$

Anche la funzione tau associata a $W = (C, q)^*$ ammette un'espressione esplicita. Sia nuovamente $\{c_1, \ldots, c_m\}$ una base per C e continuiamo a supporre $q = z^m$; supponiamo inoltre che W sia trasverso.

Proposizione 56. Con le convenzioni precedenti risulta

$$\tau_W(g) = \det(M_{ij})_{i,j=1\ldots m} \qquad \text{dove } M_{ij} := \langle c_i, z^{j-1}g\rangle \tag{104}$$

Si noti che la matrice M si può interpretare come il determinante Wronskiano delle m funzioni tau $\langle c_i, g\rangle$ determinate dalle singole condizioni c_i: infatti scritto g nelle coordinate $\boldsymbol{t}$ risulta

$$D^j g = z^j g$$

e quindi la (104) si può riscrivere (usando in luogo di M la sua trasposta) come

$$\tau_W(g) = \det \begin{pmatrix} \langle c_1, g\rangle & \langle c_2, g\rangle & \ldots & \langle c_m, g\rangle \\ \langle c_1, Dg\rangle & \langle c_2, Dg\rangle & \ldots & \langle c_m, Dg\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle c_1, D^{m-1}g\rangle & \langle c_2, D^{m-1}g\rangle & \ldots & \langle c_m, D^{m-1}g\rangle \end{pmatrix}$$

La scelta di un'altra base per C genera solo una costante.

Dimostrazione. Calcoliamo τ come determinante di $1 + g\pi_+ g^{-1}K$. Anzitutto occorre determinare l'applicazione $K\colon \mathcal{P} \to \mathcal{R}_-$ il cui grafico è W; questo significa imporre che sia $p + K(p) \in W$ per ogni $p \in \mathcal{P}$. Ora, $z^m W$ è uno spazio di polinomi quindi deve essere $K(p) = \frac{q(z)}{z^m}$ con q polinomio al più di grado $m-1$; in altri termini esistono funzionali $\beta_1, \ldots, \beta_m \in \mathcal{P}^*$ tali che

$$K(p) = \sum_{i=1}^{m} \beta_i(p) z^{-i}$$

I funzionali β_i sono determinati imponendo che il polinomio $z^m(p + K(p))$ soddisfi le m condizioni indipendenti $\{c_1, \ldots, c_m\}$:

$$\langle c_i, \beta_m(p) + \beta_{m-1}(p)z + \cdots + \beta_1(p)z^{m-1} + p_0 z^m + p_1 z^{m+1} + \ldots \rangle = 0 \quad (1 \leq i \leq m)$$

ovvero imponendo il sistema

$$\begin{pmatrix} \langle c_1, z^{m-1} \rangle & \ldots & \langle c_1, 1 \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle c_m, z^{m-1} \rangle & \ldots & \langle c_m, 1 \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1(p) \\ \vdots \\ \beta_m(p) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \langle c_1, z^m p \rangle \\ \vdots \\ \langle c_m, z^m p \rangle \end{pmatrix}$$

che, definita la matrice $C_{ij} := \langle c_i, z^{m-j} \rangle$ e i funzionali $\alpha_i := p \mapsto \langle c_i, z^m p \rangle$, si scrive più sinteticamente come $C_{ij}\beta_j = -\alpha_i$, e ammette quindi soluzione

$$\beta_j = -(C^{-1})_{ji}\alpha_i \tag{105}$$

Sia $f_k := g(\pi_+(g^{-1}z^{-k}))$; usando il fatto che $\pi_+(v) = v - \pi_-(v)$ risulta

$$f_k = g(g^{-1}z^{-k} - \pi_-(g^{-1}z^{-k})) = z^{-k} - g\pi_-(g^{-1}z^{-k})$$

Se ora scriviamo $g^{-1} = 1 + \sum_{i \geq 1} h_i^- z^i$ abbiamo che

$$f_k = z^{-k} - g\pi_-(z^{-k} + \sum_{i \geq 1} h_i^- z^{i-k}) = z^{-k}(1 - g(1 + h_1^- z + \cdots + h_{k-1}^- z^{k-1})) \tag{106}$$

In definitiva l'applicazione di cui vogliamo il determinante è

$$p \mapsto p + \sum_{k=1}^{m} \beta_k(p) f_k$$

ovvero

$$\tau_W(g) = \det(1 + \sum_{k=1}^{m} \beta_k \otimes f_k)$$

Questo si riduce al determinante della matrice $m \times m$ data da $\delta_{jk} + \langle \beta_j, f_k \rangle$ dove i β_j sono dati dalla (105) e gli f_k dalla (106). Ora, $\langle \beta_j, f_k \rangle = -(C^{-1})_{ji} \langle \alpha_i, f_k \rangle$ e quindi

$$\det(1 + \langle \beta_j, f_k \rangle) = \det C^{-1} \det(C - \langle \alpha_i, f_k \rangle)$$

Il fattore $\det C^{-1}$ non dipende da g in alcun modo e quindi può essere riassorbito nella costante implicita nella definizione di funzione tau; resta dunque il determinante della matrice

$$C - \langle \alpha_i, f_k \rangle = \begin{pmatrix} \langle c_1, z^{m-1} - z^m f_1 \rangle & \dots & \langle c_1, 1 - z^m f_m \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle c_m, z^{m-1} - z^m f_1 \rangle & \dots & \langle c_m, 1 - z^m f_m \rangle \end{pmatrix}$$

ovvero, usando la (106),

$$\begin{pmatrix} \langle c_1, gz^{m-1} \rangle & \langle c_1, gz^{m-2}(1 + h_1^- z) \rangle & \dots & \langle c_1, g(1 + h_1^- z + \dots + h_{m-1}^- z^{m-1}) \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle c_m, gz^{m-1} \rangle & \langle c_m, gz^{m-2}(1 + h_1^- z) \rangle & \dots & \langle c_m, g(1 + h_1^- z + \dots + h_{m-1}^- z^{m-1}) \rangle \end{pmatrix}$$

Prendendo opportune combinazioni lineari delle colonne possiamo eliminare sistematicamente tutte le potenze di z di ordine non minimo, quindi in definitiva risulta

$$\tau_W(g) = \det \begin{pmatrix} \langle c_1, gz^{m-1} \rangle & \langle c_1, gz^{m-2} \rangle & \dots & \langle c_1, g \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle c_m, gz^{m-1} \rangle & \langle c_m, gz^{m-2} \rangle & \dots & \langle c_m, g \rangle \end{pmatrix}$$

che coincide (a meno di un irrilevante fattore $(-1)^{m(m-1)/2}$ dovuto allo scambio di tutte le colonne) con $\det M$. □

Ad esempio per il punto semplice $W(\lambda, \alpha)$ (determinato dalla condizione $\mathrm{ev}_\lambda^1 - \alpha\, \mathrm{ev}_\lambda^0$) il funzionale k_1 è determinato imponendo che sia

$$p_0 + 2p_1\lambda + 3p_2\lambda^2 + \dots - \alpha k_1(p) - \alpha p_0 \lambda - \alpha p_1 \lambda^2 - \dots = 0$$

da cui

$$k_1(p) = \sum_{i \geq 0} p_i \lambda^i (\frac{i+1}{\alpha} - \lambda)$$

Così ad esempio $k_1(z) = \lambda(2/\alpha - \lambda)$ e quindi $K(z) = \lambda(2/\alpha - \lambda)z^{-1}$.

§4. Azione sulla Grassmanniana duale. Vediamo ora, sempre seguendo [Kas95], come si possa trasferire l'azione di Γ_+ da $\mathrm{Gr}^{\mathrm{rat}}$ alla grassmanniana razionale duale; le orbite corrispondenti sono contenute in sottograssmanniane *finito-dimensionali* che per giunta si partizionano in jacobiani generalizzati.

Un'**applicazione limitante** è un'applicazione $\mu \colon \mathbb{C} \to \mathbb{N}$ tale che il suo supporto $\mathbb{C} \setminus \mu^{-1}(0)$ è un insieme finito di punti. La **dimensione** di un'applicazione limitante μ è $\dim \mu = \sum_{\lambda \in \mathbb{C}} \mu(\lambda)$. Data μ, definiamo

$$\mathscr{C}(\mu) = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{C}} \mathscr{C}_\lambda^{\mu(\lambda)}$$

allora $\mathscr{C}(\mu)$ è uno spazio lineare di dimensione $\dim \mu$. Per ogni $0 < m < \dim \mu$ possiamo allora considerare la grassmanniana degli m-spazi in esso, $\mathrm{Gr}(m, \mathscr{C}(\mu))$. Per poter applicare la mappa duale ai punti di questo spazio occorre una scelta canonica di q; assumeremo z^m se non specificato altrimenti, e denoteremo l'insieme delle coppie (C, q) con $C \in \mathrm{Gr}(m, \mathscr{C}(\mu))$ con $\mathrm{Gr}_q(m, \mathscr{C}(\mu))$.

Ora, fissati m e q la mappa duale $\mathrm{Gr}_q(m, \mathscr{C}(\mu)) \to \mathrm{Gr}^{\mathrm{rat}}$ è iniettiva. Dato $C \in \mathrm{Gr}(m, \mathscr{C}(\mu))$ consideriamo $W = (C, z^m)^*$. Definito $p_C := \prod_\lambda (z - \lambda)^{\mu(\lambda)}$ abbiamo che $z^k p_C \in V_C$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, quindi W ha la forma

$$W = z^{-m}(\mathrm{span}\{\omega_1, \dots, \omega_n\} \oplus p_C \mathcal{P})$$

L'unico grado di libertà è la scelta dei ω_i come base dello spazio dei polinomi di grado minore di $\dim \mu$ che stanno nell'annullatore di C. Siccome $\dim C = m$ deve essere $n = \dim \mu - m$, quindi la mappa duale è un isomorfismo da $\mathrm{Gr}(m, \mathscr{C}(\mu))$ a $\mathrm{Gr}(\dim \mu - m, \dim \mu)$ (che è la sua immagine in $\mathrm{Gr}^{\mathrm{rat}}$). In particolare queste due grassmanniane finito-dimensionali sono duali tra loro, e W è il duale di C secondo il pairing canonico tra $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}^*$. Le grassmanniane che corrispondono a scelte diverse di q sono isomorfe tra loro e tutte le affermazioni precedenti si applicano nello stesso modo.

Da notare che questo isomorfismo significa anche che possiamo usare sull'immagine in $\mathrm{Gr}^{\mathrm{rat}}$ le coordinate di Plucker su $\mathrm{Gr}(m, \dim \mu)$, date dal sottospazio generato dai ω_i nello spazio generato da $\{z^i\}_{0 \le i \le \dim \mu - 1}$.

Definiamo ora un'azione di Γ_+ su $\mathscr{C}$ come segue: se $g = \mathrm{e}^{t_n z^n}$ poniamo

$$g.\, \mathrm{ev}_\lambda^0 := \mathrm{e}^{-t_n \lambda^n}\, \mathrm{ev}_\lambda^0$$

$$g.\, \mathrm{ev}_\lambda^r := \mathrm{e}^{-t_n \lambda^n} \left(\mathrm{ev}_\lambda^r - \sum_{i=1}^{r} k_{r-i}\, \mathrm{ev}_\lambda^{r-i} \right) \qquad \text{per ogni } r \ge 1$$

dove i coefficienti $\{k_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ sono definiti ricorsivamente come segue:

$$k_{r-i} := r\, \frac{\partial}{\partial z} \log g(z) \Big|_\lambda \; k_{r-1} = \frac{1}{g(\lambda)} \left(\binom{r}{i} g^{(i)}(\lambda) - \sum_{j=1}^{i-1} k_{r-j} \binom{r-i}{i-j} g^{(i-j)}(\lambda) \right)$$

Tale azione si estende poi per linearità all'intero $\mathscr{C}(\mu)$. Ora, siccome $g.c$ ha il medesimo supporto e limitazione di c, Γ_+ agisce su $\mathscr{C}(\mu)$; inoltre l'azione è lineare e non ha nucleo, quindi porta sottospazi m-dimensionali in sottospazi m-dimensionali. Se ne conclude che Γ_+ agisce su $\mathrm{Gr}_q(m, \mathscr{C}(\mu))$, come anticipato. Inoltre la definizione precedente fa sì che per ogni $c \in \mathscr{C}(\mu)$, $g \in \Gamma_+$ e $f \in \mathbb{C}[[z]]$ risulti

$$\langle c, f \rangle = 0 \text{ se e solo se } \langle g.c, g.f \rangle = 0$$

quindi tale azione di Γ_+ su $\mathrm{Gr}^{\mathrm{rat}*}$ coincide con l'azione moltiplicativa su $\mathrm{Gr}^{\mathrm{rat}}$ via mappa duale.

L'orbita di $W \in \mathrm{Gr}$ modulo l'azione di Γ_- è lo jacobiano generalizzato della curva spettrale. Per i punti di $\mathrm{Gr}^{\mathrm{rat}}$ il quoziente non è necessario, perchè ogni $g \neq 1 \in \Gamma_-$ manda W al di fuori della Γ_+-orbita di W. Se ne conclude che la Γ_+-orbita di ciascun $(C, q) \in \mathrm{Gr}_q(m, \mathscr{C}(\mu))$ coincide con lo jacobiano di una curva razionale singolare. Allora ogni $\mathrm{Gr}(m, \dim \mu)$ si può scrivere come l'unione disgiunta di jacobiani di tutte le curve razionali descritte da m condizioni differenziali limitate da μ. Siccome ciascun $n \in \mathbb{N}$ è realizzabile come $\dim \mu$ per molte scelte diverse di μ (etichettate dalle partizioni di n), possiamo dire che per ogni $m \leq n$ la grassmanniana $\mathrm{Gr}(m, n)$ si decompone in jacobiani di curve rappresentate da m condizioni limitate da μ, per ogni μ di dimensione n.

Esempio per $n = 2$: prendiamo la partizione (2), allora l'applicazione limitante è del tipo $\mu_\lambda(z) = 2\delta_{\lambda z}$ per qualche $\lambda \in \mathbb{C}$. Un punto nella corrispondente grassmanniana $\mathrm{Gr}(1, \mathscr{C}(\mu))$ è dato da un sottospazio unidimensionale C di $\mathscr{C}(\mu)$ generato da una combinazione lineare $c_0 \operatorname{ev}_\lambda^0 + c_1 \operatorname{ev}_\lambda^1$ con $(c_0, c_1) \in P^1_{\mathbb{C}}$. Come agisce Γ_+? Se $c_1 = 0$ la condizione da imporre è $c_0 p(\lambda) = 0$ e quindi $V_C = (z - \lambda)\mathcal{P}$, nel qual caso $W = \mathcal{P}$ che è fissato dall'intero Γ_+ (come si può verificare direttamente anche sulla grassmanniana duale, essendo $g. \operatorname{ev}_\lambda^0 = g^{-1} \operatorname{ev}_\lambda^0$). Se $c_1 \neq 0$ allora la condizione si scrive $p'(\lambda) + cp(\lambda) = 0$ (dove $c := c_0/c_1$) e $(C, q)^* = W(\lambda, -c)$; in questo caso Γ_+ agisce in maniera non banale. Lo stabilizzatore della condizione è il sottogruppo generato dagli elementi della forma $\mathrm{e}^{z^i - ia^{i-1}z}$ (per ogni valore di c), e quindi l'azione vera e propria si ottiene quozientando Γ_+ per tale sottogruppo; ciascuna classe ha come rappresentante un elemento della forma $\mathrm{e}^{\theta z}$. Tale elemento porta la condizione detta in $p'(\lambda) + (c - \theta)p(\lambda) = 0$. In particolare l'intera orbita è isomorfa a $\mathbb{C}$, che è infatti lo jacobiano della curva con una cuspide semplice in λ.

Oppure possiamo prendere la partizione (11), nel qual caso $\mu_{\lambda,\mu}(z) = \delta_{\lambda z} + \delta_{\mu z}$. Un punto di questa grassmanniana è specificato da una condizione $c_1 p(\lambda) + c_2 p(\mu) = 0$ per $(c_1, c_2) \in P^1_{\mathbb{C}}$. In questo caso però se uno qualunque dei due coefficienti è zero abbiamo la soluzione banale ($W = \mathcal{P}$), e dunque due orbite distinte, mentre se $c_1, c_2 \in \mathbb{C}^*$ allora, posto nuovamente $c := c_2/c_1 \neq 0$, risulta che la condizione $p(\lambda) + cp(\mu) = 0$ è stabilizzata da elementi del tipo

$$\mathrm{e}^{z^i - \frac{b^i - a^i}{b - a} z}$$

Di nuovo, ciascuna classe di equivalenza in Γ_+ è rappresentata da un elemento della forma $\mathrm{e}^{\theta z}$ (non quozientiamo per tutto lo stabilizzatore perchè rimane una periodicità in θ). L'azione di tale elemento sulla condizione dà $p(\lambda) + \mathrm{e}^{\theta(b-a)} cp(\lambda) = 0$; in particolare c può essere traslato in ogni punto di $\mathbb{C}^*$, che è lo jacobiano della curva con un punto doppio ottenuta identificando λ e μ.

§5. Razionalità della funzione di Baker stazionaria. Consideriamo ora la funzione di Baker *stazionaria* associata al generico punto di $\mathrm{Gr}^{\mathrm{rat}}$; essa è determinata dal sistema (102) in cui le variabili $\boldsymbol{t}_{>1}$ sono poste uguale a zero. Allora $\mathrm{e}^{\xi(\boldsymbol{t}, z)} = \mathrm{e}^{xz}$ e le sue derivate successive danno origine unicamente a potenze di x, quindi:

Proposizione 57. Per ogni $W \in \mathrm{Gr}^{\mathrm{rat}}$ i coefficienti della sua funzione di Baker ridotta stazionaria sono funzioni razionali di x e $\mathrm{e}^{\lambda x}$ per un insieme finito di $\lambda \in \mathbb{C}$.

Usando la formula di Sato possiamo ottenere una caratterizzazione più esplicita del primo coefficiente di $\tilde{\psi}_W$ che sarà utile tra breve.

Proposizione 58. Sia $\{c_1, \ldots, c_m\}$ una base per C, $f_i(x) := \langle c_i, \mathrm{e}^{xz} \rangle$ e $\mathrm{Wr}(f)$ il Wronskiano di $\{f_1, \ldots, f_m\}$. Allora il coefficiente di z^{-1} nell'espansione della funzione di Baker ridotta stazionaria è dato da $-\frac{\partial}{\partial x} \log \mathrm{Wr}(f)$.

Infatti abbiamo visto in §4 che

$$a_1(x) = -\frac{1}{\tau_W(x)} \frac{\partial \tau(x)}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \log \tau_W(x)$$

e d'altro canto τ_W è data dal determinante (104) che (nel caso stazionario) è proprio il Wronskiano delle f_i.

Vogliamo ora determinare i sottospazi $W \in \mathrm{Gr}^{\mathrm{rat}}$ tali che i coefficienti della sua funzione di Baker ridotta stazionaria sono funzioni razionali della sola x (senza termini esponenziali). Riconsideriamo i due esempi della sottosezione precedente: posto $\boldsymbol{t}_{>1} = \mathbf{0}$ risulta nel primo esempio

$$\tilde{\psi}(x, z) = 1 + \frac{\alpha\mu \mathrm{e}^{\mu x} - \lambda \mathrm{e}^{\lambda x}}{\mathrm{e}^{\lambda x} - \alpha \mathrm{e}^{\mu x}} \frac{1}{z}$$

e nel secondo

$$\tilde{\psi}(x, z) = 1 - (\lambda + \frac{1}{x - \alpha}) \frac{1}{z}$$

ovvero, la prima espressione coinvolge fattori esponenziali mentre la seconda no. La differenza tra i due esempi è che nel primo caso C è generato da una condizione "a due punti" (cioè che coinvolge i due punti distinti λ e μ), mentre nel secondo si ha una condizione "a un punto". Anche dal punto di vista algebro-geometrico la differenza è chiara: nel primo caso risulta $A_W = \{\, f \in \mathcal{P} \mid f(\lambda) = f(\mu) \,\}$, il che significa che la curva $\operatorname{Spec} A_W$ ha un punto doppio (ottenuto identificando λ con μ); viceversa per il secondo esempio risulta $A_W = \{\, f \in \mathcal{P} \mid f'(\lambda) = 0 \,\}$, ovvero $\operatorname{Spec} A_W$ ha una cuspide in λ.

Definizione 20. Un sottospazio $C \subseteq \mathscr{C}$ si dice **omogeneo** se $C = \bigoplus_\lambda (C \cap \mathscr{C}_\lambda)$.

In altri termini uno spazio di condizioni è omogeneo se e solo se esso ammette una base formata da condizioni a un punto.

Proposizione 59. Dato $W \in \mathrm{Gr}^{\mathrm{rat}}$, sono fatti equivalenti:
1) i coefficienti a_i nell'espansione della funzione di Baker ridotta stazionaria di W sono funzioni razionali della sola x;
2) $W = (C, q)^*$ per qualche $C \subseteq \mathscr{C}$ omogeneo;
3) la curva $\operatorname{Spec} A_W$ è unicursale (ovvero, l'isomorfismo birazionale $\mathbb{C} \to \operatorname{Spec} A_W$ indotto dall'inclusione $A_W \subseteq \mathcal{P}$ è bigettivo).

Le funzioni di Baker determinate dagli spazi che soddisfano tale condizione parametrizzano le soluzioni razionali della gerarchia KP, come vedremo in §11.

Dimostrazione. (1↔2) Supponiamo che valga la 2; gli a_i si ottengono risolvendo il sistema

$$\langle c_i, (z^m + \sum_{i=1}^{m} a_i(x) z^{m-i}) \mathrm{e}^{xz} \rangle = 0$$

Ma se $\{c_i\}$ è una base formata da condizioni a un punto allora da ciascuna di queste equazioni si cancella un fattore $\mathrm{e}^{\lambda x}$, e si rimane con un sistema di equazioni a coefficienti polinomiali per gli a_i; dunque essi sono funzioni razionali della sola x. Il viceversa è più difficile: non è chiaro infatti come dimostrare che quando C non è omogeneo non accade mai che gli esponenziali si cancellino. Usiamo allora la proposizione 58. Chiamiamo una funzione del tipo $p(x)e^{\lambda x}$ (dove p è un polinomio) *semplice*. Sia $\mathscr{F}$ lo spazio lineare generato dalle funzioni semplici (per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$), allora $c \mapsto \langle c, \mathrm{e}^{xz} \rangle$ definisce un isomorfismo $\mathscr{C} \to \mathscr{F}$; sotto di esso le condizioni a un punto corrispondono alle funzioni semplici. Il Wronskiano $\mathrm{Wr}(f)$ appartiene a $\mathscr{F}$, e la derivata logaritmica di una funzione in $\mathscr{F}$ è razionale se e solo se tale funzione è semplice. Siano ora date $f_1, \ldots, f_m$ funzioni linearmente indipendenti in $\mathscr{F}$ e supponiamo che il loro Wronskiano $\mathrm{Wr}(f)$ sia semplice; affermiamo che in tal caso lo spazio lineare generato da $\{f_1, \ldots, f_m\}$ ha una base che consiste di funzioni semplici [Wil93, lemma 5.9]. Ne segue che a_1 non è una funzione razionale, da cui la tesi.

(2↔3) Anche qui una parte è facile. Supponiamo che C sia omogeneo e anzi che sia addirittura $C \subseteq \mathscr{C}_\lambda$; allora esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $(z-\lambda)^n \mathcal{P} \subseteq A_C$, ne segue che la mappa $\mathbb{C} \to \operatorname{Spec} A_C$ è bigettiva ed è un isomorfismo in $\mathbb{C} \setminus \{\lambda\}$; ovvero $\operatorname{Spec} A_C$ si ottiene da $\mathbb{C}$ introducendo una singola cuspide in λ. In generale C coinvolgerà un numero finito di punti $\{\lambda_i\}$; in tal caso si verifica che A_C coincide con l'intersezione delle algebre che corrispondono a ciascun sottospazio $C_i := C \cap \mathscr{C}_{\lambda_i}$, quindi $\operatorname{Spec} A_C$ si ottiene da $\mathbb{C}$ introducendo cuspidi in ciascun punto del supporto di C.

Per il viceversa l'idea è la seguente. Scriviamo $c = c_1 + \cdots + c_q$ per la decomposizione di $c \in C$ in somma di condizioni a un punto, diciamo con $c_i \in \mathscr{C}_{\lambda_i}$; q si dice la *lunghezza* di c. Diciamo l'ordine della più alta derivata coinvolta nelle condizioni c_i l'*ordine* di c in λ_i; c si dice *cattivo* se per ogni $1 \leq i \leq q$ il sottospazio C non contiene alcuna condizione a un punto supportata in λ_i dello stesso ordine di c_i. Allora C è omogeneo se e solo se non contiene elementi cattivi. Supponiamo che C non sia omogeneo e fissiamo c cattivo tale che (1) la sua lunghezza $q \geq 2$ sia minimale tra le lunghezze di tutti gli elementi cattivi, e (2) se il supporto di c è $S = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_q\}$ allora l'ordine di c in λ_1 è minimale tra gli ordini di tutti gli elementi cattivi di C con supporto S. Allora preso $f \in A_C$ risulta $f(\lambda_i) = f(\lambda_j)$ per ogni i e j, quindi la mappa $\mathbb{C} \to \operatorname{Spec} A_C$ manda S in un singolo punto, e la curva $\operatorname{Spec} A_C$ ha (almeno) un punto di molteplicità q [Wil93, lemma 5.4]. □

§6. La grassmanniana adelica. La grassmanniana adelica si ottiene quozientando il sottospazio di $\mathrm{Gr}^{\mathrm{rat}}$ individuato dalla proposizione 59 per l'azione del gruppo Γ_-. Più precisamente, sia dato un punto $(C, q) \in \mathrm{Gr}^{\mathrm{rat}*}$ con C omogeneo; sia $\Lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$ il supporto di C e per ogni $1 \leq i \leq r$ sia $n_i := \dim(C \cap \mathscr{C}_{\lambda_i})$ il numero di condizioni indipendenti imposte al punto λ_i. Allora

$$q_C := \prod_i (z - \lambda_i)^{n_i}$$

è un polinomio monico di grado $\dim C$, come si verifica immediatamente.

Definizione 21. L'insieme

$$\mathrm{Gr}^{\mathrm{ad}} := \{\, W \in \mathrm{Gr}^{\mathrm{rat}} \mid W = (C, q)^* \ \text{ con } C \text{ omogeneo e } q = q_C \,\}$$

si dice la **grassmanniana adelica**.

Proposizione 60. La funzione di Baker ridotta stazionaria associata a un punto di $\mathrm{Gr}^{\mathrm{ad}}$ tende a 1 per $x \to \infty$.

Prima di dimostrarlo qualche preliminare. Sia C omogeneo e $\{c_0, \dots, c_{m-1}\}$ una base di condizioni a un punto, con $c_i \in \mathscr{C}_{\lambda_i}$; allora

$$\langle c_i, g \rangle = \sum_k \alpha_{ik} g^{(k)}(\lambda_i) \tag{107}$$

(da notare che qui i λ_i non sono necessariamente distinti). Sia $W = (C, q_C)^*$. Definiamo i polinomi ϕ_i tramite l'uguaglianza

$$\langle c_i, \mathrm{e}^{xz} \rangle = \mathrm{e}^{\lambda_i x} \phi_i(x) \tag{108}$$

ovvero, usando la (107),

$$\phi_i(x) = \sum_k \alpha_{ik} x^k$$

Sia $M(x, z)$ la matrice $m \times m$ con elementi

$$M_{ij}(x, z) = (D + \lambda_i)^j \left(\phi_i(x) - \frac{1}{z - \lambda_i} \phi_i'(x) \right)$$

al variare di i, j in $0 \dots m-1$. Allora affermiamo che

$$\tilde{\psi}_W(x, z) = \frac{\det M(x, z)}{\det M(x, \infty)}$$

Infatti consideriamo il sottospazio $U = z^{-m} V_C$ ed esprimiamo la sua funzione di Baker usando la formula di Sato:

$$\tilde{\psi}_U(x, \zeta) = \frac{\tau_U(\mathrm{e}^{xz}(1 - \frac{z}{\zeta}))}{\tau_U(\mathrm{e}^{xz})}$$

Per calcolare le funzioni tau possiamo usare la (104):

$$\tau_U(\mathrm{e}^{xz}) = \langle c_i, D^j \mathrm{e}^{xz} \rangle = D^j \langle c_i, \mathrm{e}^{xz} \rangle = \mathrm{e}^{\lambda_i x} (D + \lambda_i)^j \phi_i(x)$$

dove si è usata la (108); similmente

$$\tau_U(\mathrm{e}^{xz}(1-\frac{z}{\zeta})) = \langle c_i, D^j\mathrm{e}^{xz}\rangle - \langle c_i, D^{j+1}\mathrm{e}^{xz}\zeta^{-1}\rangle = D^j\langle c_i, \mathrm{e}^{xz}\rangle - D^{j+1}\langle c_i, \mathrm{e}^{xz}\rangle\zeta^{-1}$$

$$= \mathrm{e}^{\lambda_i x}(D+\lambda_i)^j\phi_i(x) - \mathrm{e}^{\lambda_i x}(D+\lambda_i)^{j+1}\phi_i(x)\zeta^{-1}$$

ovvero

$$= \mathrm{e}^{\lambda_i x}(D+\lambda_i)^j(\phi_i(x) - (\phi_i'(x)+\lambda_i\phi_i)\zeta^{-1})$$

che si può riscrivere

$$= \mathrm{e}^{\lambda_i x}\frac{\zeta-\lambda_i}{\zeta}(D+\lambda_i)^j(\phi_i(x) - \frac{1}{\zeta-\lambda_i}\phi_i'(x))$$

che è esattamente la formula voluta (con il quoziente i fattori $\mathrm{e}^{\lambda_i x}$ si cancellano) tranne che per un fattore $\prod_i((z-\lambda_i)/z)$, che è esattamente l'elemento di Γ_- che fa passare da U a W.

Dimostrazione. Scegliamo una base per C in maniera tale che se $\lambda_i = \lambda_j$ allora il grado di ϕ_i è diverso dal grado di ϕ_j. A λ_i fissati, il grado del polinomio $M(x,\infty)$ dipende solo dal grado dei ϕ_i e inoltre decresce strettamente se sostituiamo un qualunque ϕ_i con un polinomio di grado minore. Ora, espandiamo $\det M(x,z)$ come somma di 2^m determinanti ottenuti scegliendo o i termini con ϕ_i o i termini con ϕ_i' dalla i-esima riga; per l'ultima nota abbiamo che l'addendo $M(x,\infty)$ ottenuto prendendo tutti i termini con ϕ_i ha grado massimo. Ne segue la tesi. □

Riassumendo, $W \in \mathrm{Gr}^{\mathrm{ad}}$ se e solo se la sua funzione di Baker ridotta stazionaria è una funzione razionale separabile di x e z che tende a 1 per $x \to \infty$ (e per $z \to \infty$). Equivalentemente, $W \in \mathrm{Gr}^{\mathrm{ad}}$ se e solo se tutti i coefficienti a_i sono funzioni razionali che si annullano all'infinito. Si noti che ciò implica in particolare che l'insieme degli $x \in \mathbb{C}$ per cui $\mathrm{e}^{-xz}W \notin U_{\mathbb{N}}$ è non solo discreto ma finito.

I punti della grassmanniana adelica possono essere caratterizzati anche in base al comportamento della funzione tau.

Definizione 22. Una funzione tau si dice **di grado limitato** se esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che τ è un polinomio di grado al più N in ciascuna delle variabili $\boldsymbol{t}$.

Ricordiamo l'azione di Γ_- sulle funzioni tau data dalla (88) (cfr. shift di Miwa, in cui $g = 1 - az^{-1}$ visto come elemento di Γ_- corrisponde a moltiplicare τ per $\mathrm{e}^{\xi(\boldsymbol{t},a)}$.)

Proposizione 61. Sia $W \in \mathrm{Gr}^{\mathrm{rat}}$; sono fatti equivalenti:
1) $W \in \mathrm{Gr}^{\mathrm{ad}}$;
2) τ_W è di grado limitato;
3) τ_W è un polinomio in x con coefficiente direttore costante.

Dimostrazione. (1→2) Sia dato $W \in \mathrm{Gr}^{\mathrm{ad}}$, allora $W = (C, q_C)^*$ per un qualche C omogeneo di dimensione m. Sia $\gamma := \frac{z^m}{q_C}$ e $W' := \gamma W$, allora $W' \in \mathrm{Gr}^{\mathrm{rat}}$ e la funzione tau ad essa associata è data dalla formula (104). Ora, siccome C è omogeneo la i-esima colonna di tale matrice è formata da polinomi moltiplicati da $\mathrm{e}^{\xi(\boldsymbol{t},\lambda_i)}$; questi fattori si possono raccogliere ottenendo così

$$\tau_{W'}(g) = \prod_{i=1}^{m} \mathrm{e}^{\xi(\boldsymbol{t},\lambda_i)} p(\boldsymbol{t})$$

dove p è un polinomio di un certo grado N in x e di grado minore o uguale a N in ciascuna delle variabili $\boldsymbol{t}_{>1}$. Occorre ora tornare indietro da W' a W; ma notiamo che

$$\gamma = \frac{z^m}{\prod_i (z - \lambda_i)} = \prod_i \frac{z}{z - \lambda_i} = \prod_i \frac{1}{1 - \lambda_i z^{-1}} = \prod_i \frac{1}{q_z(\lambda_i)}$$

ovvero $\gamma = (\prod_i q_z(\lambda_i))^{-1}$; ne segue che

$$\tau_{\gamma W} = \prod_i \mathrm{e}^{-\xi(\boldsymbol{t},\lambda_i)} \tau_W = p(\boldsymbol{t})$$

come volevasi.

(2→1) Supponiamo che τ_W sia di grado limitato, allora è un polinomio in x e la relativa soluzione u della gerarchia KP è una funzione razionale che si annulla all'infinito; ma tutte le soluzioni siffatte vengono da punti di $\mathrm{Gr}^{\mathrm{ad}}$, come già visto.

(3↔2) Siccome τ_W è un polinomio in x la soluzione corrispondente è razionale e si annulla all'infinito. Inoltre $\tilde{\psi}_W = 1 + \sum_{i \geq 1} a_i z^{-i}$ e usando la formula di Sato si ha $a_i = \frac{P_i \tau}{\tau}$ con P_i operatore differenziale di ordine i in x; allora dire che τ ha coefficiente direttore in x che è una costante equivale a dire che il numeratore di ciascun a_i è di grado più basso rispetto al denominatore, cioè $\lim_{x\to\infty} \tilde{\psi} = 1$; ciò caratterizza i punti di $\mathrm{Gr}^{\mathrm{ad}}$. □

Possiamo usare questo fatto per fissare il fattore costante in τ in modo tale che esso sia un polinomio monico in x; con questa convenzione, i flussi KP su $\mathrm{Gr}^{\mathrm{ad}}$ corrispondono esattamente alla traslazione nella variabile t_k per la funzione τ.

Per esempio riprendendo la funzione di Baker dell'esempio 6 abbiamo che per portare $(C, z)^*$ in $\mathrm{Gr}^{\mathrm{ad}}$ occorre l'azione dell'elemento $\gamma = \frac{z}{z-\lambda}$ di Γ_-, e la corrispondente funzione di Baker sarà

$$\psi_{(C,z-\lambda)^*}(g, z) = \gamma \psi_{(C,z)^*}(g, z) = \frac{z}{z-\lambda} g(z) \left(1 - (\lambda + \frac{g(\lambda)}{g'(\lambda) - \alpha g(\lambda)}) \frac{1}{z}\right)$$

$$= g(z) \left(1 - \frac{1}{\frac{g'(\lambda)}{g(\lambda)} - \alpha} \frac{1}{z - \lambda}\right)$$

Nella nomenclatura di Shiota, le soluzioni che si ottengono dai punti di $\mathrm{Gr}^{\mathrm{ad}}$ sono chiamate *quasi-razionali* (mentre le soluzioni *razionali* sono quelle in cui τ è un polinomio in tutti i tempi; ciò implica che essi compaiano in numero finito e quindi sono esattamente le soluzioni che provengono dai punti di Gr_0).

§7. Descrizione astratta. Resta da spiegare la ragione dell'aggettivo "adelica"; a tale scopo occorre anzitutto introdurre le "grassmanniane a un punto".

Definizione 23. Dato $\lambda \in \mathbb{C}$ denotiamo $\overline{\mathrm{Gr}}_\lambda$ il sottoinsieme di $\overline{\mathrm{Gr}}^{\mathrm{rat}}$ formato dai sottospazi tali che nella condizione (100) si può prendere $p = q = (z - \lambda)^k$ per qualche $k \in \mathbb{N}$. Poniamo inoltre $\mathrm{Gr}_\lambda := \overline{\mathrm{Gr}}_\lambda \cap \mathrm{Gr}^{\mathrm{rat}}$.

Si noti che per $\lambda = 0$ riottieniamo esattamente le grassmanniane $\overline{\mathrm{Gr}}_0$ e Gr_0 che sono state introdotte in §1.6, coerentemente con la notazione utilizzata. Notiamo inoltre che tutte le $\overline{\mathrm{Gr}}_\lambda$ al variare di $\lambda \in \mathbb{C}$ sono isomorfe tra loro: infatti la traslazione $z \mapsto z-\lambda$ è un isomorfismo che manda $\overline{\mathrm{Gr}}_0$ in $\overline{\mathrm{Gr}}_\lambda$. Questo significa che ogni risultato ottenuto per $\overline{\mathrm{Gr}}_0$ vale anche per ogni $\overline{\mathrm{Gr}}_\lambda$, in particolare per ciascuna di esse sussiste la decomposizione in celle illustrata in §1.6.

La definizione di $\overline{\mathrm{Gr}}_\lambda$ può essere parafrasata come segue: per ogni $W \in \overline{\mathrm{Gr}}_\lambda$ esiste un numero naturale k tale che W contiene tutti i polinomi che hanno uno zero almeno di ordine k in λ e non contiene funzioni razionali che hanno un polo di ordine maggiore di k in λ. Quanto ai punti di Gr_λ, la proposizione 53 ci dice che per essi la codimensione di W in $(z - \lambda)^{-k}\mathcal{P}$ coincide con k mentre la (101) ci dice che, posto come al solito $W = W' \oplus (z - \lambda)^k\mathcal{P}$, risulta $\dim W' = k$; ovvero, anche la codimensione di $(z - \lambda)^k\mathcal{P}$ in W è pari a k. Riotteniamo così la descrizione di Gr_λ come l'unione delle grassmanniane finito-dimensionali del tipo $\mathrm{Gr}(k, 2k)$ al variare di $k \in \mathbb{N}$.

Osserviamo che $\mathcal{P} \in \mathrm{Gr}_\lambda$ per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$ (in effetti è l'unico sottospazio di $\mathcal{P}$ che soddisfa alle condizioni poste per $k = 0$), quindi lo spazio dei polinomi può essere visto come un punto che funge da "origine" in ciascun Gr_λ (questo fatto sarà sfruttato tra un attimo).

Quanto alla descrizione duale degli elementi di Gr_λ, evidentemente essi corrispondono a coppie $(C, q) \in \mathrm{Gr}^{\mathrm{rat}*}$ in cui C è uno spazio n-dimensionale di condizioni supportate in λ ($C \subseteq \mathcal{C}_\lambda$) e si sceglie $q = q_C$; in particolare ciascun elemento di Gr_λ appartiene anche a $\mathrm{Gr}^{\mathrm{ad}}$.

Possiamo ora definire la grassmanniana adelica in una maniera astratta, ovvero indipendentemente dalla sua realizzazione come sottoinsieme di $\mathrm{Gr}^{\mathrm{rat}}$.

Definizione 24. La **grassmanniana adelica astratta**, denotata $\mathrm{Gr}^{\mathrm{Ad}}$, è l'insieme di tutte le applicazioni

$$f\colon \mathbb{C} \to \coprod_{\lambda \in \mathbb{C}} \mathrm{Gr}_\lambda \tag{109}$$

tali che $f(\lambda) \in \mathrm{Gr}_\lambda$ e $f(\lambda) = \mathcal{P}$ tranne che per un insieme finito di punti.

Alternativamente, $\mathrm{Gr}^{\mathrm{Ad}}$ può essere vista come il *prodotto ristretto* dei Gr_λ con "origine" $\mathcal{P}$; la somiglianza di questa definizione con la costruzione dell'anello degli adèles giustifica la terminologia adottata.

In breve, un elemento di $\mathrm{Gr}^{\mathrm{Ad}}$ si identifica con un insieme finito $\{W_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ di sottospazi di $\mathcal{P}$ tali che $W_\lambda \in \mathrm{Gr}_\lambda$ e Λ è un insieme finito di punti di $\mathbb{C}$, detto il **supporto** dell'elemento in questione.

Occorre ora descrivere un'immersione

$$i\colon\ \mathrm{Gr}^{\mathrm{Ad}} \to \mathrm{Gr}^{\mathrm{rat}} \tag{110}$$

che consenta di identificare la grassmanniana adelica astratta $\mathrm{Gr}^{\mathrm{Ad}}$ con il sottoinsieme $\mathrm{Gr}^{\mathrm{ad}}$ di $\mathrm{Gr}^{\mathrm{rat}}$ considerato fino ad ora. Questo è banale per i punti $W \in \mathrm{Gr}_\lambda$ per qualche $\lambda \in \mathbb{C}$: essi corrispondono infatti da un lato alle applicazioni (109) il cui supporto consta del solo λ (che viene mandato in W), dall'altro ai punti di $\mathrm{Gr}^{\mathrm{rat}}$ già ricordati. Abbiamo dunque una prima corrispondenza tra il sottoinsieme di $\mathrm{Gr}^{\mathrm{Ad}}$ formato dalle applicazioni il cui supporto consta al massimo di un punto e i punti di $\mathrm{Gr}^{\mathrm{rat}}$ per cui $C \subseteq \mathcal{C}_\lambda$ per qualche $\lambda \in \mathbb{C}$.

Per definire l'immersione (110) sui rimanenti punti di $\mathrm{Gr}^{\mathrm{Ad}}$ occorre qualche preliminare. Per ogni $\lambda \in P^1_{\mathbb{C}}$ definiamo la forma bilineare simmetrica su $\mathcal{R}$

$$\langle f, g\rangle_\lambda := \operatorname*{res}_{z=\lambda} f(z)g(z)\mathrm{d}z$$

e il corrispondente annichilatore

$$\mathrm{Ann}_\lambda(W) := \{\, f \in \mathcal{R} \mid \langle f, g\rangle_\lambda = 0 \text{ per ogni } g \in W \,\}$$

In particolare il caso $\lambda = \infty$ ha una grande importanza, perchè $\mathcal{P}$ e $\mathcal{R}_-$ sono sottospazi isotropi massimali per $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_\infty$; in altri termini $\mathcal{P}^* = \mathcal{P}$ e $\mathcal{R}_-^* = \mathcal{R}_-$. Più in generale, per ogni $W \subseteq \mathcal{R}$ risulta

$$(fW)^* = f^{-1}W^* \tag{111}$$

Definiamo ora un'applicazione $(\,\cdot\,)^*\colon\ \mathrm{Gr}^{\mathrm{rat}} \to \mathrm{Gr}^{\mathrm{rat}}$, che chiameremo l'**involuzione aggiunta**, tramite la posizione $W^* := \mathrm{Ann}_\infty W$. La cosa ha senso perchè se $W \in \mathrm{Gr}^{\mathrm{rat}}$ allora esiste un polinomio p tale che $p\mathcal{P} \subseteq W \subseteq p^{-1}\mathcal{P}$; passando agli annichilatori e usando la (111) ne segue che $p\mathcal{P} \subseteq W^* \subseteq p^{-1}\mathcal{P}$, e dunque $W^* \in \mathrm{Gr}^{\mathrm{rat}}$ a sua volta. Che $(\,\cdot\,)^*$ sia effettivamente un'involuzione segue subito dalle usuali proprietà delle forme bilineari simmetriche; notiamo anche che tale involuzione preserva ogni sottospazio Gr_λ.

Ora possiamo definire l'embedding (110) come quell'applicazione che manda il generico punto $\{W_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ di $\mathrm{Gr}^{\mathrm{Ad}}$ nel punto di $\mathrm{Gr}^{\mathrm{rat}}$ dato da

$$i(\{W_\lambda\}) := \bigcap_{\lambda\in\mathbb{C}} \mathrm{Ann}_\lambda W_\lambda^* \tag{112}$$

Per capire questa definizione cerchiamo di riformularla in un linguaggio più concreto (ma meno intrinseco). Notiamo anzitutto che $\mathrm{Ann}_\lambda \mathcal{P}$ è semplicemente l'insieme delle funzioni regolari in λ; dunque la (112) ci dice che $i(\{W_\lambda\})$ consiste di tutte le funzioni che

- sono regolari ovunque tranne che in ∞ e nel supporto Λ di $\{W_\lambda\}$;
- appartengono a $\mathrm{Ann}_\lambda W_\lambda^* = \mathrm{Ann}_\lambda(\mathrm{Ann}_\infty W_\lambda)$ per ogni $\lambda \in \Lambda$.

In particolare quando Λ consiste di un unico punto, cioè dato $W_\lambda \in \mathrm{Gr}_\lambda$, abbiamo che i manda $\{W_\lambda\}$ nel sottospazio formato dalle funzioni razionali f tali che

$$\langle f, g\rangle_\lambda = 0 \quad \text{per ogni } g \text{ tale che } \langle g, h\rangle_\infty = 0 \text{ per ogni } h \in W_\lambda$$

ma se f e g sono due polinomi di Laurent in $z - \lambda$ allora risulta[10] $\langle f, g\rangle_\lambda = 0$ se e solo se $\langle f, g\rangle_\infty = 0$, e dunque f soddisfa le condizioni poste se e solo se appartiene a W_λ. Dunque i estende effettivamente l'embedding $\mathrm{Gr}_\lambda \to \mathrm{Gr}^{\mathrm{rat}}$ già descritto.

In generale scegliamo per ogni $\lambda \in \Lambda$ un intero k_λ tale che W_λ^* soddisfi le condizioni della definizione 23; allora per quest'ultimo spazio possiamo scegliere una base del tipo

$$W_\lambda^* = \mathrm{span}\{g_0, \dots, g_{k_\lambda - 1}, (z-\lambda)^{k_\lambda}, (z-\lambda)^{k_\lambda+1}, \dots\}$$

dove i g_i sono polinomi di Laurent in $z - \lambda$. Il sottospazio $\mathrm{Ann}_\lambda(W_\lambda^*)$ consiste allora di tutte le funzioni razionali f che hanno un polo di ordine al più k in λ e che soddisfano le k condizioni lineari

$$\operatorname*{res}_{z=\lambda} f(z) g_i(z) \mathrm{d}z = 0 \qquad \text{per ogni } 0 \le i \le k_\lambda - 1 \tag{113}$$

Ciascuna di queste equazioni impone una condizione lineare omogenea sui coeffcienti della serie di Laurent di f in λ. A questo punto $i(\{W_\lambda\})$ non è altro che lo spazio ottenuto imponendo simultaneamente queste condizioni nei vari punti $\lambda \in \Lambda$, o più esplicitamente

$$i(\{W_\lambda\}) = \{\, f \in q_C^{-1}\mathcal{P} \mid \langle c, (z-\lambda_i)^{n_i} f\rangle = 0 \text{ per ogni } c \in C_i,\ i = 1 \dots n \,\}$$

Che questa applicazione sia effettiamente iniettiva segue dal prossimo risultato, che ne descrive esplicitamente l'inversa:

Proposizione 62. Dato $W \in \mathrm{Gr}^{\mathrm{ad}}$ e definito

$$W_\lambda := \mathrm{Ann}_\lambda(W^*) \cap \mathcal{L}_{z-\lambda}$$

per ogni $\lambda \in \Lambda$ (dove $\mathcal{L}_{z-\lambda}$ è lo spazio dei polinomi di Laurent in $z-\lambda$) risulta $i(\{W_\lambda\}) = W$.

Infine definiamo $\mathrm{Gr}^{\mathrm{ad}}(R) = \mathrm{Gr}^{\mathrm{ad}} \cap \mathrm{Gr}^{\mathrm{rat}}(R)$. Da notare che se $\{W_\lambda\} \in \mathrm{Gr}^{\mathrm{Ad}}$ allora $i(\{W_\lambda\}) \in \mathrm{Gr}^{\mathrm{ad}}(R)$ se e solo se il supporto di $\{W_\lambda\}$ appartiene al disco $|z| < R$.

§8. L'involuzione aggiunta. La versione analitica dell'involuzione aggiunta è la seguente: sullo spazio di Hilbert H si definisce la forma bilineare continua simmetrica e non degenere

$$B(f, g) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{S^1} f(z) g(z) \mathrm{d}z$$

Dato Q sottospazio lineare di H, denotiamo Q^* il suo annichilatore rispetto a B:

$$Q^* := \{\, f \in H \mid B(f, g) = 0 \text{ per ogni } g \in Q \,\}$$

La posizione $Q \mapsto Q^*$ definisce l'involuzione aggiunta in ambito analitico. La relazione tra i due ambiti è la seguente: se denotiamo con $\mathrm{Gr}^{\mathrm{rat}}(R)$ il sottoinsieme di $\mathrm{Gr}^{\mathrm{rat}}$ in cui

[10] Questo segue dal teorema dei residui, che ci dice che $\mathrm{res}_{z=\infty} f(z)g(z)\mathrm{d}z = -\sum_{\lambda\in\mathbb{C}} \mathrm{res}_{z=\lambda} f(z)g(z)\mathrm{d}z$.

le radici di p e q sono contenute nel disco $|z| < R$ allora la chiusura in L^2 definisce un embedding di $\mathrm{Gr}^{\mathrm{rat}}(R)$ in $\mathrm{Gr}(R)$; le due involuzioni aggiunte si restringono entrambe su $\mathrm{Gr}^{\mathrm{rat}}(R)$ e coincidono in esso.

Le funzioni di Baker di Q e Q^* soddisfano l'**identità bilineare**

$$\int_{S^1} \psi_Q(x,z)\psi_{Q^*}(y,-z)\mathrm{d}z = 0 \quad \text{per ogni } x, y$$

Non c'è una formula esplicita per ψ_{Q^*} in termini di ψ_Q; tuttavia le funzioni tau sono in relazione come segue:

$$\tau_{Q^*}(g) = \tau_Q(\check{g}^{-1})$$

dove $g \in \Gamma_+$ e $\check{g}(z) = g(-z)$. C'è invece una semplice relazione tra i corrispondenti operatori pseudo-differenziali:

Proposizione 63. Se ϕ è l'operatore di Volterra associato a Q, allora l'operatore associato a Q^* è $(\phi^*)^{-1}$.

Questo si dimostra usando il seguente lemma:

Proposizione 64. Siano $P = \sum_{i \le n} a_i D^i$ e $Q = \sum_{i \le m} b_i D^i$ due operatori pseudo-differenziali, $p = P\mathrm{e}^{xz}$ e $q = Q\mathrm{e}^{xz}$ le corrispondenti funzioni formali. Allora

$$-\operatorname*{res}_{z=\infty} p(x,z)q(x,-z)\mathrm{d}z = \operatorname{res} PQ^*$$

Dimostrazione. Il lato sinistro è semplicemente il coefficiente di z^{-1} nella serie di potenze formale $p(x,z)q(x,-z)$, ovvero

$$\sum_{i+j=-1} (-1)^j a_i(x) b_j(x)$$

A destra c'è il coefficiente di D^{-1} nell'operatore PQ^*. Ora,

$$PQ^* = \sum_{i,j} a_i(x) D^i (-D)^j b_j(x)$$

Siccome il residuo di un operatore della forma $aD^r b$ è ab se $r = -1$ e zero altrimenti, ne segue la tesi. $\square$

Possiamo ora dimostrare l'affermazione precedente: per ogni $m \ge 0$ è

$$\int_{S^1} \psi_Q(x,z) D^m \psi_{Q^*}(x,-z)\mathrm{d}z = 0 \quad \text{per ogni } x$$

dato che, a x fissato, $\psi_Q(x,z)$ appartiene a Q e $D^m\psi_{Q^*}(x,z)$ appartiene a Q^*. La funzione integrata è definita per ogni z al di fuori di S^1 e non ha singolarità se non all'infinito. Ne segue che

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} \psi_Q(x,z) D^m \psi_{Q^*}(x,-z) = 0$$

Sia ora ϕ' l'operatore integrale associato a Q^*; allora ψ_Q e $D^m\psi_{Q^*}$ corrispondono rispettivamente a ϕ e $D^m\phi'$, quindi per la proposizione 64

$$\operatorname{res}\phi(D^m\phi')^* = (-1)^m \operatorname{res}\phi\phi'^* D^m = 0$$

per ogni $m \geq 0$. Ne segue che $\phi\phi'^* = 1$, cioè $\phi' = (\phi^*)^{-1}$, come volevasi.

Proposizione 65. L'involuzione aggiunta preserva $\mathrm{Gr}^{\mathrm{ad}}$.

Infatti $W \in \mathrm{Gr}^{\mathrm{ad}}$ è caratterizzato dal fatto che i coefficienti a_i sono razionali e si annullano all'infinito; queste funzioni formano un'algebra chiusa sotto derivazione, e i coefficienti di $(\phi^*)^{-1}$ sono dei polinomi differenziali negli a_i; dunque anch'essi appartengono a quest'algebra.

Ci servirà una versione più generale della proposizione 63, valida anche per sottospazi che non stanno necessariamente in $\mathrm{Gr}^{\mathrm{rat}}$. Sia data $\psi \in \mathcal{M}$ in cui la serie formale è una funzione razionale di x e z, e supponiamo anche che sia regolare per $x = 0$. Ricordiamo che se ψ è la funzione di Baker di $W \in \mathrm{Gr}^{\mathrm{rat}}$ allora W è il sottospazio generato dalle funzioni $D^n\psi(x,z)|_0$. In generale, *definiamo* W_ψ come tale sottospazio.

Proposizione 66. Date $\psi, \eta \in \mathcal{M}$, siano W_ψ e W_η i corrispondenti sottospazi e N, M i corrispondenti operatori di Volterra. Se $M = (N^*)^{-1}$ allora gli spazi W_ψ e W_η sono uno l'annullatore dell'altro rispetto alla forma bilineare B.

Attenzione a non pensare che la chiusura in L^2 di W_ψ appartenga alla grassmanniana Gr. In effetti $\overline{W_\psi}$ è un sottospazio chiuso di H la cui proiezione in H_+ contiene solo polinomi; ma tale proiezione non avrà, in generale, immagine chiusa.

La ragione del termine "involuzione aggiunta" è la seguente: l'algebra di operatori differenziali associata a W^* è l'aggiunta dell'algebra associata a W. Infatti sia $f \in A_W$ e L il corrispondente operatore, allora $L\psi_W = f(z)\psi_W$ o equivalentemente $L\phi = \phi f(D)$. Prendendo l'aggiunto e dividendo per ϕ^* si ottiene

$$L^*(\phi^*)^{-1} = (\phi^*)^{-1} f(-D)$$

o equivalentemente $L^*\psi_{W^*} = f(-z)\psi_{W^*}$; dunque L^* è l'operatore che corrisponde a $f(-z) \in A_{W^*}$.

§9. Le tre involuzioni. Sia dato $W \in \mathrm{Gr}^{\mathrm{ad}}$; allora da risultati precedenti segue che la funzione di Baker di W può essere espressa come una serie di potenze *convergente*

$$\psi_W(x,z) = \mathrm{e}^{xz}(1 + \sum_{i,j \leq 1} a_{ij} x^{-j} z^{-i}) \tag{114}$$

per x e z che tendono a infinito; equivalentemente $\psi_W = \phi\mathrm{e}^{xz}$ dove

$$\phi = 1 + \sum_{i,j \leq 1} a_{ij} x^{-j} z^{-i}$$

Se denotiamo con $\mathscr{K}$ il gruppo formale degli operatori pseudo-differenziali sull'anello differenziale dato dalle serie di potenze formali in x^{-1} a coefficienti complessi, abbiamo dunque che $\mathrm{Gr}^{\mathrm{ad}}$ si embedda in $\mathscr{K}$ tramite la posizione $W \mapsto \phi$.

Ora, sull'algebra di Weyl ci sono tre involuzioni: l'aggiunto formale $L \mapsto L^*$, ovvero l'antiautomorfismo definito da $x^* = x$ e $\partial^* = -\partial$; l'involuzione bispettrale, ovvero l'antiautomorfismo definito da $b(x) = \partial$, $b(\partial) = x$; il segno, ovvero l'automorfismo definito da $s(x) = -x$ e $s(\partial) = -\partial$. Si vede subito che s commuta con le altre due involuzioni, mentre $b(L^*) = s(b(L))^* = \varphi(L)$ (trasformata di Fourier formale).

Consideriamo ora l'algebra $\mathscr{W}$ degli operatori del tipo

$$\sum_{i \leq N} \sum_{j \leq M} \beta_{ij} x^j D^i$$

Si tratta della sottoalgebra di $\Psi(\mathbb{C}((x^{-1})))$ formata dagli elementi i cui coefficienti hanno ordine limitato. Notiamo che l'algebra di Weyl si identifica con Ψ_{++}, e le tre involuzioni sopra menzionate si estendono in maniera unica ad (anti-)automorfismi di $\mathscr{W}$ che soddisfano le medesime relazioni di commutazione. Inoltre esse preservano il sottospazio $\mathscr{K}$ precedentemente definito e commutano con l'inversione $\phi \mapsto \phi^{-1}$ su $\mathscr{K}$. Definiamo l'involuzione aggiunta a su $\mathscr{W}$ come $a(\phi) = (\phi^*)^{-1}$; allora si ha la relazione

$$ab = bsa$$

tra le tre involuzioni a, b e s di $\mathscr{K}$.

Ora, per la proposizione 65 a preserva il sottospazio $\mathrm{Gr}^{\mathrm{ad}}$ di $\mathscr{K}$ e induce su di esso l'involuzione aggiunta discussa prima. Anche s preserva $\mathrm{Gr}^{\mathrm{ad}}$, infatti se pensiamo ad esso come allo spazio delle funzioni formali del tipo (114) abbiamo che

$$(s\psi)(x, z) = \psi(-x, -z)$$

e dunque

$$s(W) = \{ f \mid \check{f} \in W \}$$

Questo è un caso speciale delle trasformazioni di scala in Gr.

Anche l'involuzione b ha un'espressione facile in termini di ψ: è data da

$$(b\psi)(x, z) = \psi(z, x)$$

ma non è affatto chiaro che essa preservi $\mathrm{Gr}^{\mathrm{ad}}$: questo è quanto resta da dimostrare.

Proposizione 67. Per ogni $W \in \mathrm{Gr}^{\mathrm{ad}}$ risulta $b(W) \in \mathrm{Gr}^{\mathrm{ad}}$.

Dimostrazione. Possiamo supporre che la funzione di Baker ridotta di ψ sia regolare per $z = 0$. Definiamo $b(W)$ come il sottospazio di $\mathcal{R}$ generato dalle derivate

$$D^n \psi_W(z, x)|_{x=0} \tag{115}$$

per $n \in \mathbb{N}$. Basta dimostrare che $b(W) \in \mathrm{Gr}^{\mathrm{rat}}$, dato che per costruzione $\tilde{\psi}_W(z, x)$ è razionale e tende a 1 per $x \to \infty$. Esibiamo allora polinomi p e q tali che $p\mathcal{P} \subseteq b(W) \subseteq$

$q^{-1}\mathcal{P}$. Per quanto riguarda q, ricordiamo che $\tilde{\psi}_W$ è una funzione razionale separabile: quindi se $q(z)$ è il denominatore di $\tilde{\psi}_W$ (con x visto come parametro), tutte le funzioni (115) diventano polinomi se moltiplicate per q. Ne segue che $b(W) \subseteq q^{-1}\mathcal{P}$. Inoltre la proiezione di $b(W)$ su $\mathcal{P}$ è un isomorfismo, perchè l'n-esimo generatore (115) di $b(W)$ si proietta in un polinomio di grado n. Ne segue che la codimensione di $b(W)$ in $q^{-1}\mathcal{P}$ coincide con il grado di q.

Infine troviamo p. Sia ϕ l'operatore di Volterra associato a ψ_W, allora $M := b(K)$ è l'operatore associato a $\psi_W(z,x)$. Poniamo $U := s(W^*)$. Per la proposizione 65 $U \in \mathrm{Gr}^{\mathrm{ad}}$, quindi ha una funzione di Baker ψ_U; inoltre ψ_U è regolare per $z = 0$, dato che lo zero è un punto singolare di $\operatorname{Spec} A_W$ se e solo se è un punto singolare di $\operatorname{Spec} A_{W^*}$. Dunque possiamo considerare lo spazio $U' \subseteq \mathcal{R}$ generato da $D^n\psi_U(z,x)|_{x=0}$; per la proposizione 63 abbiamo che ψ_U corrisponde all'operatore $s(a(\phi))$, quindi $\psi_U(z,x)$ corrisponde a $N = b(s(a(\phi))) = a(b(\phi))$. Ma allora

$$(M^*)^{-1} = a(M) = a(b(\phi)) = N$$

e quindi la proposizione 66 ci dice che $b(W)$ e U' sono l'uno l'annullatore dell'altro rispetto alla forma B. C'è certamente un polinomio p tale che $U' \subseteq p^{-1}\mathcal{P}$; passando agli annullatori si ha $\check{p}\mathcal{P} \subseteq b(W)$, come richiesto. $\square$

§10. Punti semplici e funzioni di Baker associate.

Definizione 25. Una condizione $c \in \mathscr{C}_\lambda$ si dice **semplice** se essa è del tipo $c = \mathrm{ev}_{1,\lambda} + \alpha\, \mathrm{ev}_{0,\lambda}$ per qualche $\alpha \in \mathbb{C}$. Un punto $W \in \mathrm{Gr}^{\mathrm{ad}}$ si dice **semplice** se $W = (C, q_C)^*$ e C ammette una base formata da condizioni semplici.

Notando che C deve essere anche omogeneo (altrimenti $(C, q_C)^* \notin \mathrm{Gr}^{\mathrm{ad}}$) concludiamo che esiste una base $(c_1, \ldots, c_n)$ di C tale che

$$c_i = \mathrm{ev}_{1,\lambda_i} + \alpha_i\, \mathrm{ev}_{0,\lambda_i} \qquad \text{per ogni } i = 1 \ldots n \tag{116}$$

con $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tutti diversi tra loro. I $2n$ numeri complessi $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ e $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ si diranno le **coordinate grassmanniane duali** di W, e scriveremo $W = W(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\alpha})$.

Notiamo che per $n = 1$ i punti semplici $W(\lambda, \alpha)$ sono esattamente i punti di Gr_λ "per cui si può prendere $k = 1$", già considerati in §7, con l'eccezione dell'origine $\mathcal{P}$ (che corrisponderebbe a $\alpha = \infty$). Ciò equivale a cancellare un punto da $P^1_{\mathbb{C}}$ per ottenere una retta affine su cui α funge da coordinata. Esplicitamente,

$$W(\lambda, \alpha) = \mathrm{span}\{\frac{1}{z-\lambda} - \alpha, (z-\lambda), (z-\lambda)^2, \ldots\}$$

Più in generale quando $n > 1$ il sottospazio $W(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\alpha})$ consiste di tutte le funzioni razionali che sono regolari tranne che (al più) poli semplici nei punti $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (e un polo di qualunque ordine all'infinito) e soddisfano le n relazioni lineari

$$\operatorname*{res}_{z=\lambda_i} (\alpha_i + \frac{1}{z-\lambda_i}) f = 0 \tag{117}$$

(Nella descrizione astratta, $W(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\alpha})$ è il punto di $\mathrm{Gr}^{\mathrm{Ad}}$ che manda ciascun λ_i in $W(\lambda_i,\alpha_i)$.)

Calcoliamo ora la funzione di Baker associata a questi punti. Anzitutto siccome per ogni $g\in\Gamma$ risulta $z\mapsto\psi(g,z)\in W(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\alpha})$ si ha che $\psi(g,z)$ può avere al più un polo semplice in ciascun λ_i e un polo in ∞, quindi dev'essere del tipo

$$\psi(g,z)=g(z)\left(1-\sum_{j=1}^{n}\frac{b_j(g)}{z-\lambda_j}\right) \tag{118}$$

con g olomorfa nel disco $D_0(R)$ (in particolare in tutti i λ_i); le funzioni $b_j(g)$ sono allora determinate dalle condizioni (117). Si ha:

$$\operatorname*{res}_{z=\lambda_i}(\alpha_i+\frac{1}{z-\lambda_i})\psi(g,z)=$$

$$=\operatorname*{res}_{z=\lambda_i}\left(\alpha_i g(z)+\frac{g(z)}{z-\lambda_i}-\alpha_i g(z)\sum_{j=1}^{n}\frac{b_j(g)}{z-\lambda_j}-\frac{g(z)}{z-\lambda_i}\sum_{j=1}^{n}\frac{b_j(g)}{z-\lambda_j}\right)$$

Il primo termine è olomorfo in λ_i e quindi muore. Il secondo ha residuo $g(\lambda_i)$ per la formula integrale di Cauchy. Nel terzo l'unico addendo non olomorfo è quello per $j=i$, il cui residuo vale $-\alpha_i g(\lambda_i)b_i(g)$. Infine per il quarto si ha

$$-\operatorname*{res}_{z=\lambda_i}\frac{g(z)}{z-\lambda_i}\sum_{j=1}^{n}\frac{b_j(g)}{z-\lambda_j}=-\operatorname*{res}_{z=\lambda_i}\left(\frac{g(z)b_i(g)}{(z-\lambda_i)^2}+\sum_{j\neq i}\frac{g(z)b_j(g)}{z-\lambda_j}\frac{1}{z-\lambda_i}\right)=$$

$$=-g'(\lambda_i)b_i(g)-\sum_{j\neq i}\frac{g(\lambda_i)b_j(g)}{\lambda_i-\lambda_j}$$

In definitiva le condizioni (117) equivalgono al sistema

$$\left(\alpha_i+\frac{g'(\lambda_i)}{g(\lambda_i)}\right)b_i(g)+\sum_{j\neq i}\frac{b_j(g)}{\lambda_i-\lambda_j}=1$$

che si può riscrivere in forma matriciale come segue:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1+\frac{g'(\lambda_1)}{g(\lambda_1)} & \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2} & \dots & \frac{1}{\lambda_1-\lambda_n}\\ \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1} & \alpha_2+\frac{g'(\lambda_2)}{g(\lambda_2)} & \dots & \frac{1}{\lambda_2-\lambda_n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{1}{\lambda_n-\lambda_1} & \frac{1}{\lambda_n-\lambda_2} & \dots & \alpha_n+\frac{g'(\lambda_n)}{g(\lambda_n)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1(g)\\ \vdots\\ b_n(g)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$$

ovvero, detta $Y:=\operatorname{diag}(-\lambda_1,\dots,-\lambda_n)$, X la matrice di Moser ad essa associata, $B(g)$ il vettore colonna determinato dai $b_i(g)$ e $v=\begin{pmatrix}1&\dots&1\end{pmatrix}^{\top}$:

$$(X+g'(-Y)g(-Y)^{-1})B(g)=v \tag{119}$$

Se ora scriviamo $g = \mathrm{e}^{\xi(\boldsymbol{t},z)}$ abbiamo che $g(\lambda_j) = \mathrm{e}^{\xi(\boldsymbol{t},\lambda_j)}$ e $g'(\lambda_j) = \mathrm{e}^{\xi(\boldsymbol{t},\lambda_j)} \sum_{i\geq 1} it_i\lambda_j^{i-1}$, e dunque

$$X + g'(-Y)g(-Y)^{-1} = X + \mathrm{diag}(\sum_{i\geq 1} it_i\lambda_1^{i-1}, \ldots, \sum_{i\geq 1} it_i\lambda_n^{i-1}) = X + \sum_{i\geq 1} it_i(-Y)^{i-1}$$

Definiamo un'azione di Γ_+ sullo spazio $\mathcal{C}_n$ come dalla formula precedente:

$$\boldsymbol{t}.X := X + \sum_{i\geq 1} it_i(-Y)^{i-1} = X + x - 2t_2Y + 3t_3Y^2 - 4t_4Y^3 + \ldots \tag{120}$$

(notiamo che $\boldsymbol{t}.X = X + \xi'(\boldsymbol{t}, Y)$). Allora la (119) si scrive più brevemente

$$(\boldsymbol{t}.X)B(\boldsymbol{t}) = v$$

da cui $B(\boldsymbol{t}) = (\boldsymbol{t}.X)^{-1}v$.

Ora, la funzione di Baker ridotta associata alla (118) può essere vista come 1 meno il prodotto del vettore riga $\begin{pmatrix}\frac{1}{z-\lambda_1} & \ldots & \frac{1}{z-\lambda_n}\end{pmatrix}$ per il vettore colonna $B(\boldsymbol{t})$. Il primo non è altro che il prodotto $w\tilde{Y}^{-1}$, dove si è definito $\tilde{Y} := zI + Y$. In definitiva la funzione di Baker ridotta di $W(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\alpha})$ si scrive

$$\tilde{\psi}(\boldsymbol{t}, z) = 1 - w\tilde{Y}^{-1}(\boldsymbol{t}.X)^{-1}v$$

Notiamo ora che

$$\left[\boldsymbol{t}.X, \tilde{Y}\right] = [X, zI] + [X, Y] + \sum_{i\geq 1} it_i \left[(-Y)^{i-1}, zI + Y\right] = [X, Y]$$

e siccome $(X, Y, v, w) \in \tilde{\mathcal{C}}_n$ essi soddisfano la relazione definitoria di tale varietà, ovvero $[X, Y] + I = vw$; se ne conclude che $vw = \left[\boldsymbol{t}.X, \tilde{Y}\right] + I$. Possiamo allora scrivere

$$\tilde{\psi} = 1 - w\tilde{Y}^{-1}(\boldsymbol{t}.X)^{-1}v = 1 - \mathrm{Tr}(w\tilde{Y}^{-1}(\boldsymbol{t}.X)^{-1}v) = 1 - \mathrm{Tr}((\boldsymbol{t}.X)^{-1}vw\tilde{Y}^{-1})$$

ovvero, ricordando che se T è una matrice di rango 1 allora $\det(I + T) = 1 + \mathrm{Tr}\, T$,

$$= \det(I - (\boldsymbol{t}.X)^{-1}vw\tilde{Y}^{-1})$$

e sostituendo l'espressione per vw ottenuta in precedenza:

$$= \det(I - (\boldsymbol{t}.X)^{-1}(\left[\boldsymbol{t}.X, \tilde{Y}\right] + I)\tilde{Y}^{-1}) = \det((\boldsymbol{t}.X)^{-1}(\tilde{Y}(\boldsymbol{t}.X) + I)\tilde{Y}^{-1})$$

Ma il determinante di un prodotto di matrici non dipende dall'ordine dei fattori, quindi in definitiva

$$\tilde{\psi} = \det(I - (\boldsymbol{t}.X)^{-1}\tilde{Y}^{-1})$$

In particolare la funzione di Baker ridotta *stazionaria* è data da

$$\tilde{\psi}_W(x, z) = \det(I - (xI + X)^{-1}(zI + Y)^{-1})$$

mentre la funzione tau è data da

$$\tau_W(\boldsymbol{t}) = \det \boldsymbol{t}.X$$

Ancora, $W(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\alpha})$ può essere espresso come grafico di un operatore $\mathbb{C}[z] \to R_-$ quando X è invertibile, e in tal caso l'operatore in questione è dato da

$$f \mapsto -w(zI+Y)^{-1}X^{-1}f(-Y)v$$

il che si vede con un calcolo analogo.

§11. La corrispondenza KP/CM. Supponiamo di andare alla ricerca di funzioni $u = u(x, y, t)$ che soddisfano l'equazione KP (53) e che siano funzioni *razionali* di x; supponiamo inoltre che tali funzioni razionali siano proprie, cioè che sia $u = 0$ per $x \to \infty$. Una funzione siffatta si scrive in maniera unica come somma delle sue parti principali attorno ai poli (che sono tutti al finito), quindi in tutta generalità risulta

$$u(x, y, t) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k_j=m_j}^{-1} u_{jk_j}(y, t)(x - x_j(y, t))^{k_j}$$

per opportuni interi $m_j \leq -1$. Per linearità è sufficiente considerare un polo alla volta. Risulta allora (nelle espressioni seguenti si sottintende $u_k = 0$ quando non è $m \leq k \leq -1$):

$$u_{yy} = \sum_{k \geq m-2} \left(\partial_y^2 u_k - (2u_k + \partial_y u_{k+1})(k+1)\partial_y x_j + u_{k+2}(k+2)^{\underline{2}}(\partial_y x_j)^2 \right)(x - x_j)^k$$

$$u_{tx} = \sum_{k \geq m-2} \left((k+1)\partial_t u_{k+1} - (k+2)^{\underline{2}} u_{k+2}\partial_t x_j \right)(x - x_j)^k$$

$$u_{xxxx} = \sum_{k \geq m-4} (k+4)^{\underline{4}} u_{k+4}(x - x_j)^k$$

$$(u_x u)_x = \sum_{k \geq 2m-2} \left((k+1) \sum_{i=0}^{k-2m+2} (i+m) u_{i+m} u_{k-i-m+2} \right)(x - x_j)^k$$

Sostituendo nell'equazione KP $\frac{3}{4}u_{yy} = u_{tx} - \frac{1}{4}u_{xxxx} - \frac{3}{2}(u_x u)_x$ e uguagliando i coefficienti delle potenze di $(x - x_j)$ si ottengono dei vincoli molto stringenti sulle u_k. Ad esempio per $m = -1$ il termine di ordine più basso si ha per $k = -5$ e ci dice che

$$-6u_{-1} = 0$$

cioè, u non ha in realtà poli; ciò lascia solo la soluzione banale $u = 0$. Per $m = -2$ il termine di ordine minore si ha per $k = -6$ (con due contributi, da u_{xxxx} e da $(u_x u)_x$) ed è

$$-30u_{-2} - 15u_{-2}u_{-2} = 0$$

da cui l'unica soluzione non banale $u_{-2} = -2$. Il termine di ordine successivo è

$$-6u_{-1} - 18u_{-1}u_{-2} = 0$$

e sostituendo il valore già trovato per u_{-2} si ha $u_{-1} = 0$; ne concludiamo che una soluzione razionale di KP con un polo di ordine 2 in x_j ha ivi parte principale pari a $-2(x - x_j)^{-2}$. Infine per $m \leq -3$ il termine di ordine minore viene esclusivamente da $(u_x u)_x$ ed è

$$-\frac{3}{2}(2m-1)mu_m u_m = 0$$

da cui $u_m = 0$. Ne concludiamo che la generica soluzione razionale in x (che si annulla per $x = \infty$) dell'equazione KP ha la forma

$$u(x,y,t) = -2\sum_{j=1}^{n}(x - x_j(y,t))^{-2} \tag{121}$$

per opportune n funzioni $x_j(y,t)$ (che, come si vedrà più avanti, sono a loro volta funzioni razionali di y e t). Stante l'uguaglianza $u = 2\partial_x^2 \log\tau$, una soluzione del tipo (121) corrisponde a una funzione tau del tipo

$$\tau(x,y,t) = \prod_{j=1}^{n}(x - x_j(y,t)) \tag{122}$$

o in altre parole i poli di u corrispondono agli zeri della funzione tau.

Nota: tutto questo discorso è inutile: infatti $q_1 = -a_1'$ e a_1 ha al più poli di ordine 1 in x (e non può essere una costante se $u \neq 0$), quindi q_1 è somma di poli di ordine 2. Scrivendo $u = 2\sum_j \frac{c_j}{(x-x_j)}$ e sostituendo nell'equazione KP si ha che $c_j = -1$ per ogni j, da cui la forma cercata per u.

In ciò che precede ci siamo ristretti alla sola equazione KP (cioè alla prima equazione autosufficiente della gerarchia (51)), ma il discorso si può estendere all'intera gerarchia in virtù della seguente:

Proposizione 68. Sia $T(t_1,t_2,t_3)$ un polinomio monico in t_1. Se T è la funzione tau di una soluzione dell'equazione KP allora esiste ed è unica la funzione $\tau(\boldsymbol{t})$ associata a una soluzione della gerarchia KP tale che $\tau|_{\boldsymbol{t}_{>3}=\boldsymbol{0}} = T$, ed essa è ancora un polinomio monico in t_1.

Per dimostrare questo fatto ci serve un lemma.

Proposizione 69. Un punto di $\mathrm{Gr}^{\mathrm{ad}}$ è univocamente determinato da $\tau(x,t_2) := \tau(\boldsymbol{t})|_{\boldsymbol{t}_{>2}=\boldsymbol{0}}$.

Dimostrazione. Data $\tau(x,t_2)$ vogliamo esibire $W \in \mathrm{Gr}^{\mathrm{ad}}$ tale che $\tau_W|_{\boldsymbol{t}_{>2}=\boldsymbol{0}} = \tau$. Ora, qualunque sia W la sua funzione di Baker associata deve soddisfare la relazione

$$\partial_2\psi = (D^2 + 2q_1)\psi \tag{123}$$

con $q_1 = -a_1'$ la cui dipendenza da x e da t_2 è determinata dalla conoscenza di $\tau(x, t_2)$ tramite la formula (98) che, per $i = 1$, ci dice che $a_1 = -\frac{\partial}{\partial x} \log \tau$. Mettendo tutto assieme risulta

$$q_1(x, t_2, \mathbf{0}) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log \tau(x, t_2, \mathbf{0})$$

Se ora sostituiamo $\psi = (1 + \sum_i a_i z^{-i}) e^{\xi(\boldsymbol{t}, z)}$ nella (123) abbiamo

$$\partial_2 \psi = (z^2 + a_1 z + a_2 + \sum_i (a_{i+2} + \frac{\partial a_i}{\partial t_2}) z^{-i}) e^{\xi(\boldsymbol{t}, z)}$$
$$(D^2 + 2q_1)\psi = (z^2 + a_1 z + (a_2 + 2a_1' + 2q_1) + \sum_i (a_{i+2} + 2a_{i+1}' + a_i'' + 2q_1 a_i) z^{-i}) e^{\xi(\boldsymbol{t}, z)}$$

e confrontando si ottiene la famiglia numerabile di uguaglianze

$$\frac{\partial a_i}{\partial t_2} = 2a_{i+1}' + a_i'' + 2q_1 a_i$$

che può essere riscritta come la seguente relazione di ricorrenza per la famiglia di coefficienti $a_i(x, t_2, \mathbf{0})$:

$$a_{i+1}' = \frac{1}{2}(\frac{\partial a_i}{\partial t_2} - \frac{\partial^2 a_i}{\partial x^2}) - \frac{\partial^2 \log \tau}{\partial x^2} a_i \tag{124}$$

Queste equazioni si possono risolvere ricorsivamente per integrazione, infatti le costanti che appaiono restano automaticamente determinate dal requisito che le a_i siano funzioni razionali di x che si annullano nel punto all'infinito. Ma dalla conoscenza della versione stazionaria dei coefficienti a_i segue la conoscenza della funzione di Baker stazionaria, che come sappiamo (proposizione 39) è sufficiente per determinare univocamente il sottospazio W ad essa associato. $\square$

Dimostriamo ora la proposizione 68: data T funzione tau per l'equazione KP, l'argomento precedente ci dà $W \in \mathrm{Gr}^{\mathrm{ad}}$ tale che $\tau_W|_{\boldsymbol{t}_{>3} = \mathbf{0}} = T$; questa funzione tau è a sua volta un polinomio in x perchè $a_1 = -\partial_x \log \tau$ va come x^{-1}. Inoltre ogni zero di T è anche uno zero di τ_W (questo è un risultato non banale di Shiota, vedi [Shi86, Lemma 8]). Infine dalla formula (99) e dal fatto che tutti gli a_i sono funzioni razionali di x che si annullano all'infinito segue per induzione che il coefficiente di grado massimo (in x) di τ è una costante, per cui τ è un polinomio monico in x.

A questo punto possiamo enunciare la corrispondenza KP/CM:

Proposizione 70. Sia $\tau(\boldsymbol{t})$ un polinomio monico in x; esso è la funzione tau di una soluzione della gerarchia KP se e solo se, detti x_i i suoi zeri in x, le $2n$ variabili x_i, ξ_i (dove $\xi_i := \frac{1}{2}\partial_2 x_i$) evolvono lungo t_k (per ogni $k \geq 2$) come le variabili canoniche del sistema Hamiltoniano determinato da $H_k := (-1)^k \operatorname{Tr} L^k$, dove L è la matrice di Lax di CM.

Da notare che si presuppone che gli zeri di τ in x siano tutti semplici. Questo accade per quasi ogni $\boldsymbol{t}_{>1}$ perchè il sottospazio W che corrisponde a $\tau(x, \boldsymbol{t}_{>1})$ appartiene genericamente allo strato di codimensione zero $\Sigma_{\mathbb{N}}$, e in virtù della proposizione 51 per tali punti $\tau(x)$ ha termine costante non nullo.

5 Estensione al caso multicomponente

§1. La gerarchia KP multicomponente. Fissato un numero naturale $m \geq 1$, sia $\mathcal{A}_m$ l'algebra differenziale formata dalle matrici $m \times m$ a elementi in un anello di funzioni lisce di una variabile x (con $D = \frac{\partial}{\partial x}$) e ulteriori m famiglie numerabili di variabili

$$\boldsymbol{t}^{(1)} := \{t_i^{(1)}\}_{i \geq 0} \quad \dots \quad \boldsymbol{t}^{(m)} := \{t_i^{(m)}\}_{i \geq 0}$$

(si noti che a differenza del caso scalare consideriamo anche i "tempi" di pedice zero); poniamo inoltre $\bar{\boldsymbol{t}} := \{\boldsymbol{t}^{(1)}, \dots, \boldsymbol{t}^{(m)}\}$. Tramite i soliti meccanismi possiamo definire l'anello degli operatori pseudo-differenziali a coefficienti in $\mathcal{A}_m$, che denotiamo $\Psi^{(m)}$, e quindi il gruppo formale $G^{(m)} := I_m + \Psi_-^{(m)}$, dove I_m è la matrice identica $m \times m$; il suo generico elemento si scrive

$$\phi = I_m + \sum_{k \geq 1} W_k D^{-k}$$

con W_k matrici $m \times m$. Nel seguito sarà talvolta utile impiegare una rappresentazione un po' diversa: sia A una matrice *diagonale*, *costante* e *invertibile*:

$$A = \operatorname{diag}(a_1, \dots, a_m) \qquad a_i \in \mathcal{A}_m^D$$

Spesso, ma non sempre, richiederemo anche che gli elementi diagonali di A siano tutti diversi tra loro. Allora il generico elemento di G può essere scritto come

$$\phi = I_m + \sum_{k \geq 1} W_k (AD)^{-k} = I_m + W_1 A^{-1} D^{-1} + W_2 A^{-2} D^{-2} + \dots \tag{125}$$

ovvero come serie di potenze formale in $(AD)^{-k}$; ciò non lede la generalità perchè gli unici elementi non nulli di A sono costanti, che quindi si possono sempre fattorizzare dagli elementi diagonali dei coefficienti W_k. A questo punto definiamo

$$Q := \phi A D \phi^{-1} \tag{126}$$

ottenendo così, in virtù della rappresentazione (125) per ϕ, un operatore pseudo-differenziale del tipo

$$Q = AD + \sum_{i \geq 0} U_i D^{-i} = AD + U_0 + U_1 D^{-1} + \dots$$

Per ottenere il legame tra i coefficienti di Q e quelli di ϕ occorre sviluppare l'uguaglianza $Q\phi = \phi AD$:

$$(AD + U_0 + \sum_{i \geq 1} U_i D^{-i})(I_m + \sum_{j \geq 1} W_j A^{-j} D^{-j}) = AD + W_1 + \sum_{i \geq 1} W_{i+1} A^{-i} D^{-i}$$

Il primo membro si può ulteriormente scrivere

$$AD + U_0 + \sum_{i \geq 1} U_i D^{-i} + AW_1 A^{-1} + \sum_{j \geq 1} (AW_{j+1} A^{-1} + AW_j' + U_0 W_j) A^{-j} D^{-j} + \sum_{j \geq 1} H_j(U, \tilde{W}) D^{-j}$$

dove $\tilde{W}_j := W_j A^{-j}$. Uguagliando i termini di ordine zero in D si ottiene l'identità

$$U_0 + AW_1A^{-1} = W_1 \tag{127a}$$

mentre uguagliando il coefficiente di D^i per ogni $i \geq 1$ si ottiene la famiglia numerabile di identità

$$U_i + (AW_{i+1}A^{-1} - W_{i+1} + AW_i' + U_0W_i)A^{-i} + H_i(U, \tilde{W}) = 0 \tag{127b}$$

Queste relazioni permettono di ricavare le U_i in funzione delle $\{W_1, \dots, W_{i+1}\}$ (e cioè Q in funzione di ϕ), risulta ad esempio

$$\begin{aligned}
U_0 &= -(AW_1A^{-1} - W_1) \\
U_1 &= -(AW_2A^{-1} - W_2 + AW_1' + U_0W_1)A^{-1} \\
U_2 &= -(AW_3A^{-1} - W_3 + AW_2' + U_0W_2)A^{-2} - U_1W_1A^{-1}
\end{aligned}$$

e così via.

D'altro canto è anche possibile procedere in senso inverso e ricavare le W_{i+1} in funzione delle $\{U_0, \dots, U_i\}$. L'algoritmo procede come segue: anzitutto notiamo che, per ogni matrice X, $AXA^{-1} - X$ è una matrice a diagonale nulla i cui elementi fuori diagonale sono pari a $a_{\alpha\beta}x_{\alpha\beta}$, dove si sono definite le costanti $a_{\alpha\beta} := \frac{a_\alpha}{a_\beta} - 1$; si noti che nell'ipotesi in cui gli a_α sono diversi a due a due queste costanti non sono mai nulle. Per uso successivo registriamo le uguaglianze

$$a_\beta a_{\alpha\beta} = -a_\alpha a_{\beta\alpha} \qquad a_\alpha a_{\alpha\beta}^{-1} = -a_\beta a_{\beta\alpha}^{-1} \tag{128a}$$

$$a_{\alpha\beta}^{-1} + a_{\beta\alpha}^{-1} + 1 = 0 \tag{128b}$$

Supponiamo ora note le U_i, allora la (127a) ci fornisce gli elementi fuori diagonale di W_1:

$$w_{\alpha\beta}^1 = -a_{\alpha\beta}^{-1}u_{\alpha\beta}^0$$

Consideriamo ora la prima delle (127b), che scriviamo

$$AW_2A^{-1} - W_2 = -U_1A - AW_1' - U_0W_1 \tag{129}$$

Se prendiamo la parte diagonale di questa equazione matriciale il primo membro sparisce (come già osservato) e otteniamo la famiglia di m uguaglianze

$$a_\alpha {w_{\alpha\alpha}^1}' + a_\alpha u_{\alpha\alpha}^1 + \sum_\beta u_{\alpha\beta}^0 w_{\beta\alpha}^1 = 0$$

dove nell'ultimo termine l'addendo che corrisponde a $\beta = \alpha$ sparisce perchè U_0 ha diagonale nulla. Da tali equazioni otteniamo (con una integrazione, quindi a meno di una costante) le componenti diagonali di W_1 espresse in funzione di U_0, U_1 e degli elementi fuori diagonale di W_1 (che già conosciamo):

$$w_{\alpha\alpha}^1 = \int (-u_{\alpha\alpha}^1 + a_\alpha^{-1} \sum_{\beta\neq\alpha} a_{\beta\alpha}^{-1} u_{\alpha\beta}^0 u_{\beta\alpha}^0)$$

Quanto alla parte fuori diagonale dell'equazione matriciale (129), essa ci dà le componenti fuori diagonale di W_2 in funzione di U_0, U_1 e di W_1, che a questo punto è completamente nota.

In generale, la i-esima delle (127b) determina le componenti diagonali di W_i (con una integrazione) e le componenti fuori diagonale di W_{i+1} in funzione delle matrici $\{U_0, \ldots, U_i\}$; ne segue l'espressione di ϕ in funzione di Q.

Si noti che quando $A = I_m$ le relazioni (127) diventano $U_0 = 0$ e $U_i + W_i' + H_i(U, W) = 0$, del tutto analoghe alle (49) per la gerarchia scalare; tuttavia nel caso multicomponente questa scelta *non* è sempre conveniente, per un motivo che vedremo tra un attimo.

Per poter definire la gerarchia KP multicomponente manca ancora un ingrediente. Sempre dato $\phi \in G^{(m)}$, per ogni $\alpha \in \{1, \ldots, m\}$ definiamo

$$R_\alpha := \phi E_\alpha \phi^{-1} \tag{130}$$

dove E_α è la matrice che ha 1 nel posto (α, α) e zero altrove. Notiamo che

$$[Q, R_\alpha] = 0 \qquad \text{per ogni } \alpha \in \{1, \ldots, m\} \tag{131}$$

essendo $[Q, R_\alpha] = \phi(DE_\alpha - E_\alpha D)\phi^{-1} = 0$; inoltre $[R_\alpha, R_\beta] = 0$ e $\sum_{\alpha=1}^m R_\alpha = \phi I_m \phi^{-1} = I_m$, cioè gli m operatori pseudo-differenziali $\{R_1, \ldots, R_m\}$ formano una decomposizione dell'unità compatibile con Q (nel senso che i suoi elementi commutano con esso). Esplicitamente si ha

$$R_\alpha = E_\alpha + \sum_{i \geq 1} R_\alpha^i D^{-i}$$

dove i coefficienti R_α^i sono determinati imponendo che sia $R_\alpha \phi = \phi E_\alpha$; otteniamo così la famiglia numerabile di uguaglianze

$$[E_\alpha, W_i]\, A^{-i} + R_\alpha^i + H_i(R_\alpha, \tilde{W}) = 0$$

da cui

$$\begin{aligned}
R_\alpha^1 &= -\left[E_\alpha, W_1\right] A^{-1} \\
R_\alpha^2 &= -\left[E_\alpha, W_2\right] A^{-2} - R_\alpha^1 W_1 A^{-1} \\
R_\alpha^3 &= -\left[E_\alpha, W_3\right] A^{-3} - R_\alpha^2 W_1 A^{-1} + R_\alpha^1 W_1' A^{-1} - R_\alpha^1 W_2 A^{-2}
\end{aligned}$$

e così via (si noti che E_α commuta con A diagonale). Da notare che ϕ *non* si può ricostruire completamente dalla conoscenza dei soli R_α, ad esempio le componenti diagonali di W_1 non sono determinate dagli R_α^1.

Gli R_α, definiti dalla (130) in termini di ϕ, si possono esprimere come funzione dei soli coefficienti di Q. Per vederlo consideriamo una variazione infinitesima $\phi \mapsto \phi + \delta\phi$ che lasci invariato Q; ciò equivale ad imporre $\delta Q = 0$. Ma

$$\delta Q = (\delta\phi) A D \phi^{-1} - \phi A D \phi^{-1} (\delta\phi) \phi^{-1} = \left[(\delta\phi)\phi^{-1}, \phi A D \phi^{-1}\right]$$

Posto per brevità $Z := (\delta\phi)\phi^{-1}$ si ha inoltre

$$\left[Z, \phi A D \phi^{-1}\right] = [Z, \phi]\, A D \phi^{-1} + \phi\, [Z, AD]\, \phi^{-1} - \phi A D \phi^{-1}\, [Z, \phi]\, \phi^{-1}$$

I due addendi che coinvolgono il commutatore $[Z, \phi] = \delta\phi - \phi(\delta\phi)\phi^{-1}$ possono essere trascurati sulla base del fatto che esso si annulla al primo ordine significativo; la richiesta che sia $\delta Q = 0$ si traduce quindi in

$$[Z, AD] = 0$$

il che accade se e solo se la matrice Z è costante e diagonale. Ma in tale ipotesi risulta anche (con un calcolo analogo al precedente)

$$\delta R_\alpha = [Z, R_\alpha] = [Z, E_\alpha] = 0$$

e ciò mostra che i coefficienti di R_α dipendono dai W_i solo come funzione degli U_i, come affermato. Si noti che perchè il ragionamento valga è fondamentale che gli elementi diagonali di A siano tutti distinti tra loro: infatti prendendo ad esempio $A = I$ la condizione $[Z, D] = 0$ risulta soddisfatta da qualunque matrice costante, ed è quindi in generale $[Z, E_\alpha] \neq 0$. Questo è il motivo per cui nel caso multicomponente conviene scegliere la matrice A come detto. Ovviamente nel caso si scrivano le equazioni della gerarchia prendendo come incognite le W_i piuttosto che le U_i la convenienza si perde.

A questo punto definiamo il **flusso mcKP su $G^{(m)}$ rispetto alla variabile $t_k^{(\alpha)}$** (al variare di $k \in \mathbb{N}$ e $\alpha \in \{1, \ldots, m\}$) come

$$\partial_{k\alpha}\phi = -(Q^k R_\alpha)_- \phi \tag{132}$$

dove $\partial_{k\alpha} := \frac{\partial}{\partial t_k^{(\alpha)}}$, Q è definito dalla (126) e gli R_α dalla (130). La precedente è l'analogo dell'equazione di Sato scalare (46), alla quale si riduce nel caso $m = 1$ (prendendo $R_1 = 1$).

Ci aspettiamo ovviamente che la (132) scritta in termini di Q diventi un'equazione alla Lax.

Proposizione 71. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ e $\alpha \in \{1, \ldots, m\}$ l'equazione di evoluzione (132) per ϕ determina le seguenti equazioni di evoluzione per Q e R_α:

$$\partial_{k\alpha} Q = \Big[(Q^k R_\alpha)_+, Q\Big] \tag{133a}$$

$$\partial_{k\alpha} R_\beta = \Big[(Q^k R_\alpha)_+, R_\beta\Big] \tag{133b}$$

Dimostrazione. Con gli stessi passaggi del caso scalare risulta

$$\begin{aligned}\partial_{k\alpha} Q &= (\partial_{k\alpha}\phi) AD\phi^{-1} - \phi AD\phi^{-1}(\partial_{k\alpha}\phi)\phi^{-1} = \\ &= -(Q^k R_\alpha)_- \phi AD\phi^{-1} + \phi AD\phi^{-1}(Q^k R_\alpha)_- \phi\phi^{-1} = \\ &= -(Q^k R_\alpha)_- Q + Q(Q^k R_\alpha)_- = \Big[Q, (Q^k R_\alpha)_-\Big]\end{aligned}$$

ma $(Q^k R_\alpha)_- = Q^k R_\alpha - (Q^k R_\alpha)_+$ e dunque

$$\Big[Q, (Q^k R_\alpha)_-\Big] = \Big[Q, Q^k R_\alpha\Big] - \Big[Q, (Q^k R_\alpha)_+\Big] = Q^k [Q, R_\alpha] + \Big[(Q^k R_\alpha)_+, Q\Big] = \Big[(Q^k R_\alpha)_+, Q\Big]$$

da cui la (133a). Con il medesimo calcolo a partire dalla (130) si ottiene la (133b). □

Per analogia col caso scalare definiamo allora gli operatori (differenziali) di evoluzione $B_{k\alpha} := (Q^k R_\alpha)_+$; in virtù del risultato precedente ciascuno di essi forma una coppia di Lax con Q (e con gli R_β). In particolare la (133a) si configura come un sistema di (infinite) equazioni differenziali alle derivate parziali per le (infinite) funzioni incognite $u^k_{\alpha\beta}$ che fungono da elementi di matrice per i coefficienti U_k di Q.

Per $k = 0$ risulta $B_{0\gamma} = (Q^0 R_\gamma)_+ = E_\gamma$ e dunque la (133a) si legge

$$\frac{\partial U_k}{\partial t_0^{(\gamma)}} = [E_\gamma, U_k]$$

ovvero

$$\partial_{0\gamma} u^k_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\gamma} u^k_{\gamma\beta} - \delta_{\gamma\beta} u^k_{\alpha\gamma}$$

In altri termini, l'evoluzione descritta dai tempi $t_{0\gamma}$ è banale sugli elementi diagonali (analogamente al fatto che t_0 non gioca alcun ruolo nel caso scalare) mentre sul generico elemento fuori diagonale $u^k_{\alpha\beta}$ con $\alpha \neq \beta$ si ha una dipendenza esponenziale del tipo $u^k_{\alpha\beta} = \mathrm{e}^{t_0^{(\alpha)} - t_0^{(\beta)}}$. Nel seguito la dipendenza dai tempi di pedice zero sarà generalmente trascurata; se necessario essa può essere ripristinata come da espressione precedente.

Il primo operatore di evoluzione non banale si ha per $k = 1$:

$$B_{1\gamma} = (QR_\gamma)_+ = AE_\gamma D + X_\gamma \tag{134}$$

dove $X_\gamma := U_0 E_\gamma - A\,[E_\gamma, W_1]\,A^{-1}$ può essere espresso solo in termini di U_0: infatti

$$\begin{aligned}(X_\gamma)_{\alpha\beta} &= u^0_{\alpha\beta}\delta_{\beta\gamma} + a_\alpha(\delta_{\alpha\gamma} a^{-1}_{\gamma\beta} u^0_{\gamma\beta} - \delta_{\gamma\beta} a^{-1}_{\alpha\gamma} u^0_{\alpha\gamma}) a^{-1}_\beta \\ &= \delta_{\alpha\gamma} a_\gamma a^{-1}_{\gamma\beta} a^{-1}_\beta u^0_{\alpha\beta} + \delta_{\gamma\beta}(1 - a_\alpha a^{-1}_{\alpha\gamma} a^{-1}_\gamma) u^0_{\alpha\beta} \\ &= -(\delta_{\alpha\gamma} a^{-1}_{\beta\gamma} + \delta_{\gamma\beta} a^{-1}_{\alpha\gamma}) u^0_{\alpha\beta}\end{aligned}$$

(dove si sono usate le (128)). Ora, per calcolo diretto si ha

$$[AE_\gamma D, Q] = [AE_\gamma, U_0]\,D + (AE_\gamma U_0' + [AE_\gamma, U_1]) + \sum_{i\geq 1}(AE_\gamma U_i' + [AE_\gamma, U_{i+1}])D^{-i}$$

$$[X_\gamma, Q] = [X_\gamma, A]\,D - AX_\gamma' + [X_\gamma, U_0] + \sum_{i\geq 1}([X_\gamma, U_i] - \sum_{k=1}^{i-1}(-1)^k \binom{i-1}{k} U_{i-k} X_\gamma^{(k)})D^{-i}$$

Mettendo assieme i due addendi si ha che il termine di grado 1 in D si annulla (perchè $[AE_\gamma, U_0] = -\,[X_\gamma, A]$), come previsto; confrontando ciò che resta con $\partial_{1\gamma} Q$ si ottiene il sistema dato dall'equazione

$$\partial_{1\gamma} U_0 = AE_\gamma U_0' - AX_\gamma' + [AE_\gamma, U_1] + [X_\gamma, U_0]$$

e, per ogni $i \geq 1$,

$$\partial_{1\gamma} U_i = AE_\gamma U_i' + [AE_\gamma, U_{i+1}] + [X_\gamma, U_i] - \sum_{k=1}^{i-1}(-1)^k \binom{i-1}{k} U_{i-k} X_\gamma^{(k)}$$

Le precedenti sono le equazioni della gerarchia KP multicomponente per il generico tempo di pedice 1. Analogamente si possono scrivere le equazioni cui soddisfano le U_i per i tempi di pedice maggiore o uguale a due.

Proposizione 72.

$$\sum_{\gamma=1}^{m} a_\gamma^{-1} B_{1\gamma} = D$$

Dimostrazione. Dalla (134) si ha

$$\sum_{\gamma=1}^{m} a_\gamma^{-1} B_{1\gamma} = \sum_{\gamma=1}^{m} a_\gamma^{-1} A E_\gamma D + \sum_{\gamma=1}^{m} a_\gamma^{-1} X_\gamma = D + \sum_{\gamma=1}^{m} a_\gamma^{-1} X_\gamma$$

da cui la tesi segue se $\sum_\gamma a_\gamma^{-1} X_\gamma = 0$. Ma

$$(\sum_{\gamma=1}^{m} a_\gamma^{-1} X_\gamma)_{\alpha\beta} = -\sum_{\gamma=1}^{m} (\delta_{\alpha\gamma} a_\gamma^{-1} a_{\beta\gamma}^{-1} + \delta_{\gamma\beta} a_\gamma^{-1} a_{\alpha\gamma}^{-1}) u_{\alpha\beta}^0 = -(a_\alpha^{-1} a_{\beta\alpha}^{-1} + a_\beta^{-1} a_{\alpha\beta}^{-1}) u_{\alpha\beta}^0$$

e usando la prima delle (128) si vede che il termine entro le parentesi fa zero, come richiesto. $\square$

Se ne conclude che

$$\sum_{\gamma=1}^{m} a_\gamma^{-1} \partial_{1\gamma} Q = [D, Q]$$

ovvero, la variabile x si identifica con la combinazione lineare (di pesi a_γ) degli m tempi di pedice uno.

Dalle (133) segue, analogamente al caso scalare, che

$$\partial_{k\alpha} Q^\ell = \left[B_{k\alpha}, Q^\ell\right]$$

e questo fatto si può usare per dimostrare che tutti i flussi mcKP commutano tra loro e che le quantità $\operatorname{Tr} Q^\ell$ sono conservate (si noti che in questo setting per far funzionare la definizione di traccia di Adler bisogna inserire anche una traccia matriciale). Infine, i B_k soddisfano un'equazione di zero curvatura:

$$\partial_{k\alpha} B_{\ell\beta} - \partial_{\ell\beta} B_{k\alpha} = [B_{k\alpha}, B_{\ell\beta}] \tag{135}$$

§2. La funzione di Baker formale. Introduciamo ora le funzioni di Baker formali multicomponente. Dato il complesso delle variabili $\bar{\boldsymbol{t}}$ definiamo l'applicazione a valori matriciali

$$\Xi(\bar{\boldsymbol{t}}, z) := \operatorname{diag}(\xi(\boldsymbol{t}^{(1)}, z), \ldots, \xi(\boldsymbol{t}^{(m)}, z)) = \begin{pmatrix} \sum_{i\geq 0} t_i^{(1)} z^i & & \\ & \ddots & \\ & & \sum_{i\geq 0} t_i^{(m)} z^i \end{pmatrix} \tag{136}$$

Sia poi $\mathcal{M}^{(m)}$ il modulo libero di rango uno su $\Psi^{(m)}$ formato dalle espressioni del tipo

$$\psi = \tilde{\psi} \mathrm{e}^{\Xi(\bar{\boldsymbol{t}}, z)}$$

dove $\tilde{\psi}$ è un elemento di $\mathcal{A}_m((z^{-1}))$, cioè una serie di Laurent formale in z^{-1} a coefficienti (matriciali) in $\mathcal{A}_m$. Per definire l'azione di $\Psi^{(m)}$ su oggetti siffatti occorre specificare come agisce D sull'espressione $\mathrm{e}^{\Xi(\bar{\boldsymbol{t}},z)}$; per capirlo notiamo anzitutto che in virtù della proposizione 72 risulta

$$a_\alpha D = \partial_{1\alpha} + \sum_{\beta\neq\alpha} \frac{a_\alpha}{a_\beta}\partial_{1\beta}$$

e dunque

$$\begin{aligned} AD.\mathrm{e}^{\Xi(\bar{\boldsymbol{t}},z)} &= \begin{pmatrix} a_1 D & & \\ & \ddots & \\ & & a_m D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{t_0^{(1)}+t_1^{(1)}z+\sum_{i\geq 2} t_i^{(1)}z^i} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathrm{e}^{t_0^{(m)}+t_1^{(m)}z+\sum_{i\geq 2} t_i^{(m)}z^i} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{t_0^{(1)}+t_1^{(1)}z+\sum_{i\geq 2} t_i^{(1)}z^i} z & & \\ & \ddots & \\ & & \mathrm{e}^{t_0^{(m)}+t_1^{(m)}z+\sum_{i\geq 2} t_i^{(m)}z^i} z \end{pmatrix} = z\mathrm{e}^{\Xi(\bar{\boldsymbol{t}},z)} \end{aligned}$$

Imponiamo quindi che sia

$$AD.(\tilde{\psi}\mathrm{e}^{\Xi(\bar{\boldsymbol{t}},z)}) := (A\tilde{\psi}' + z\tilde{\psi})\mathrm{e}^{\Xi(\bar{\boldsymbol{t}},z)}$$

da cui

$$(AD)^n.(\tilde{\psi}\mathrm{e}^{\Xi(\bar{\boldsymbol{t}},z)}) = \sum_{k\geq 0} \binom{n}{k} A^k \tilde{\psi}^{(k)} z^{n-k}\, \mathrm{e}^{\Xi(\bar{\boldsymbol{t}},z)} \tag{137}$$

per ogni $n \in \mathbb{Z}$.

Definizione 26. Dato $\phi = I_m + \sum_i W_i (AD)^{-i} \in G^{(m)}$ l'espressione

$$\psi(\bar{\boldsymbol{t}}, z) := \phi\mathrm{e}^{\Xi(\bar{\boldsymbol{t}},z)} = (I_m + \sum_{i\geq 1} W_i z^{-i})\mathrm{e}^{\Xi(\bar{\boldsymbol{t}},z)} \tag{138}$$

si dice la **funzione di Baker formale associata a ϕ.**

Con un calcolo del tutto analogo a quello per il caso scalare si vede allora che per ogni $\phi \in G^{(m)}$ la relativa funzione di Baker formale ψ risulta essere autofunzione di Q relativa all'autovalore z.

Qual è l'analogo del gruppo di gauge $1 + \Psi_-$? Consideriamo una serie $\gamma = I_m + \sum_{i\geq 1} C_i z^{-i}$ con C_i matrici a elementi costanti; allora

$$\phi\gamma\mathrm{e}^{\Xi} = \phi(I_m + \sum_{i\geq 1} C_i z^{-i})\mathrm{e}^{\Xi} = (I_m + \sum_{j\geq 1} W_j z^{-j})(I_m + \sum_{i\geq 1} C_i z^{-i})\mathrm{e}^{\Xi}$$

e questo coincide con $\psi\gamma$ se e solo se γ commuta con e^{Ξ}, cioè le matrixi C_i sono diagonali. Ne segue che γ deve appartenere a $\Gamma_-(m)$, il prodotto diretto di m copie di Γ_-.

Proposizione 73. Se ϕ è una soluzione dell'equazione (132) allora

$$\partial_{k\alpha}\psi = (Q^k R_\alpha)_+\psi \tag{139}$$

Dimostrazione. Si ha

$$\partial_{k\alpha}\psi = (\partial_{k\alpha}\phi)\mathrm{e}^{\Xi(\bar{t},z)} + \phi\partial_{k\alpha}\mathrm{e}^{\Xi(\bar{t},z)}$$

Dalla (132) il primo addendo è pari a $-(Q^k R_\alpha)_-\psi$; per il secondo notiamo che

$$\partial_{k\alpha}\mathrm{e}^{\Xi(\bar{t},z)} = E_\alpha z^k \mathrm{e}^{\Xi(\bar{t},z)}$$

e d'altro canto è anche $(AD)^k\mathrm{e}^{\Xi(\bar{t},z)} = z^k\mathrm{e}^{\Xi(\bar{t},z)}$, quindi

$$\partial_{k\alpha}\mathrm{e}^{\Xi(\bar{t},z)} = E_\alpha (AD)^k \mathrm{e}^{\Xi(\bar{t},z)} \tag{140}$$

quindi si ha che

$$\phi\partial_{k\alpha}\mathrm{e}^{\Xi(\bar{t},z)} = \phi E_\alpha \phi^{-1}\phi(AD)^k\phi^{-1}\phi\mathrm{e}^{\Xi(\bar{t},z)} = Q^k R_\alpha\psi$$

In definitiva risulta

$$\partial_{k\alpha}\psi = (-(Q^k R_\alpha)_- + Q^k R_\alpha)\psi = (Q^k R_\alpha)_+\psi$$

come richiesto. □

Infine, anche nel caso multicomponente sussiste un risultato di universalità.

Proposizione 74. Sia data $\psi \in \mathcal{M}^{(m)}$ e supponiamo che per ogni $k \in \mathbb{N}$ e $\alpha \in \{1, \dots, m\}$ risulti $\partial_{k\alpha}\psi = P_{k\alpha}\psi$ con $(P_{k\alpha})_+ = P_{k\alpha}$; allora ψ è la funzione di Baker associata a una soluzione della gerarchia KP multicomponente.

Dimostrazione. Sostituendo $\psi = \phi\mathrm{e}^{\Xi(\bar{t},z)}$ e usando ancora la (140) si ottiene

$$(\partial_{k\alpha}\phi)\mathrm{e}^{\Xi(\bar{t},z)} + \phi E_\alpha(AD)^k\mathrm{e}^{\Xi(\bar{t},z)} = P_k\phi\mathrm{e}^{\Xi(\bar{t},z)}$$

da cui l'uguaglianza tra operatori pseudo-differenziali

$$\partial_k\phi + \phi E_\alpha(AD)^k = P_k\phi$$

che si può riscrivere

$$P_k = (\partial_k\phi)\phi^{-1} + Q^k R_\alpha \tag{141}$$

Proiettando su $\Psi_-^{(m)}$ si ottiene

$$0 = (\partial_k\phi)\phi^{-1} + (Q^k R_\alpha)_-$$

e quindi ϕ soddisfa la (132). □

§3. La soluzione associata a un elemento di Gr_m**.** Da qui in poi denoteremo con Gr_m la (componente di indice zero della) grassmanniana di Segal-Wilson associata a $H^{(m)} = L^2(S^1, \mathbb{C}^m)$, ovvero l'insieme dei sottospazi lineari W in $H^{(m)}$ tali che p_+ è di Fredholm di indice zero e p_- è compatto. Nostro scopo è quello di mostrare che ad ogni $W \in \mathrm{Gr}_m$ si associa, esattamente come nel caso scalare, un operatore $\phi \in G^{(m)}$ che soddisfa le equazioni della gerarchia KP multicomponente.

Consideriamo il gruppo Γ_+^m formato da m copie indipendenti di Γ_+, visto come sottogruppo di matrici diagonali in $\mathrm{GL}_{\mathrm{res}}(H^{(m)})$. Esplicitamente il generico $g \in \Gamma_+^m$ si scrive

$$g = \operatorname{diag}(g_1, \ldots, g_m) \quad \text{ con } g_\alpha \in \Gamma_+$$

Le usuali famiglie di coordinate su Γ_+ inducono nella maniera ovvia altrettante famiglie di coordinate su Γ_+^m: ad esempio se usiamo le coordinate $\boldsymbol{h}$ su Γ_+ abbiamo che ciascun $g \in \Gamma_+^m$ è determinato da un insieme di successioni $\{\boldsymbol{h}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{h}^{(m)}\}$ tramite l'uguaglianza

$$g = \operatorname{diag}(1 + \sum_{k \geq 1} h_k^{(1)} z^k, \ldots, 1 + \sum_{k \geq 1} h_k^{(m)} z^k)$$

Oppure possiamo usare le coordinate $\boldsymbol{t}$, nel qual caso scriveremo

$$g = \exp \operatorname{diag}(\sum_{k \geq 1} t_k^{(1)} z^k, \ldots, \sum_{k \geq 1} t_k^{(m)} z^k) = \exp \Xi(\bar{\boldsymbol{t}}, z) \tag{142}$$

dove l'applicazione Ξ è quella definita dalla (136).

Il gruppo Γ_+^m agisce su $H^{(m)}$, e quindi su Gr_m, per moltiplicazione. Nel seguito adotteremo sistematicamente la convenzione di scrivere gli elementi di $H^{(m)}$ come *vettori riga*, ne segue che l'azione di Γ_+^m si intende *da destra*:

$$\begin{pmatrix} f_1 & \ldots & f_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 & & \\ & \ddots & \\ & & g_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 f_1 & \ldots & g_m f_m \end{pmatrix} \quad \text{ per ogni } f \in H^{(m)}$$

Diremo inoltre che una funzione ψ a valori matriciali appartiene a un sottospazio $W \in \mathrm{Gr}_m$ se e solo se *ciascuna sua riga*, vista come elemento di $H^{(m)}$, appartiene a W; scriveremo $\psi = \left(\begin{smallmatrix} \psi_1 \\ \cdots \\ \psi_m \end{smallmatrix}\right)$ per denotare le righe di ψ viste in questa maniera.

Dato $W \in \mathrm{Gr}_m$ definiamo

$$\Gamma_+^{m,W} := \{\, g \in \Gamma_+^m \mid W g^{-1} \text{ è trasverso} \,\} \tag{143}$$

il che significa che la proiezione ortogonale $W g^{-1} \to H_+^{(m)}$ è un isomorfismo. Ora, in $H_+^{(m)}$ vi sono gli m elementi

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{etc.}$$

La **funzione di Baker ridotta associata a** W è la matrice la cui riga ψ_α è la controimmagine dell'elemento $e_\alpha \in H_+^{(m)}$ secondo l'isomorfismo $\pi_+|_{Wg^{-1}}$; per costruzione essa risulta essere della forma

$$\tilde{\psi}_W = I_m + \sum_{i\geq 1} W_i(g)z^{-i} \tag{144}$$

per un'opportuna famiglia di matrici $\{W_i\}_{i\geq 1}$ i cui elementi sono funzioni di g. Ora, siccome ogni riga di $\tilde{\psi}_W$ appartiene al sottospazio Wg^{-1} si ha che ogni riga di $\tilde{\psi}_W g$ appartiene al sottospazio W di partenza; la **funzione di Baker associata a** $W \in \mathrm{Gr}_m$ è l'applicazione ψ_W che ad ogni $g \in \Gamma_+^{m,W}$ associa la $\tilde{\psi}_W$ così determinata, o equivalentemente l'unica espressione della forma

$$\psi_W(g,z) = (I_m + \sum_{i\geq 1} W_i(g)z^{-i})g(z) \tag{145}$$

tale che l'applicazione $z \mapsto (\psi_W(g,z))_\alpha$ appartiene a W per ogni $\alpha \in \{1,\dots,m\}$ e $g \in \Gamma_+^{r,W}$.

Come nel caso scalare abbiamo allora che, scrivendo g in termini delle coordinate $\boldsymbol{t}$ come da (142), resta definito un elemento di $G^{(m)}$ che corrisponde a ψ_W (vista come funzione di Baker formale):

$$\phi_W := I_m + \sum_{i\geq 1} W_i(\bar{\boldsymbol{t}})(AD)^{-i}$$

Proposizione 75. L'operatore ϕ_W soddisfa l'equazione (132).

Dimostrazione. Di nuovo, per l'universalità di KP multicomponente basta far vedere che l'evoluzione di ψ_W rispetto a tutti i tempi coincide con l'azione di opportuni operatori differenziali $P_{k\alpha}$. Per calcolo diretto risulta

$$\begin{aligned}\partial_{k\alpha}\psi_W &= \sum_{i\geq 1}\frac{\partial W_i}{\partial t_k^{(\alpha)}} z^{-i}\mathrm{e}^{\Xi(\bar{\boldsymbol{t}},z)} + (I_m + \sum_{i\geq 1} W_i z^{-i})E_\alpha z^k \mathrm{e}^{\Xi(\bar{\boldsymbol{t}},z)} \\ &= (E_\alpha z^k + W_1 E_\alpha z^{k-1} + \dots + W_k E_\alpha + (W_{k+1}E_\alpha + \frac{\partial W_1}{\partial t_k^{(\alpha)}} z^{-1}) + \dots)\mathrm{e}^{\Xi(\bar{\boldsymbol{t}},z)}\end{aligned} \tag{146}$$

e d'altro canto per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$(AD)^n\psi_W = (A^{-n}z^n + O(z^{n-1}))\mathrm{e}^{\Xi(\bar{\boldsymbol{t}},z)}$$

Esattamente come nel caso scalare possiamo quindi costruire un operatore differenziale $P_{k\alpha}$ di grado k e con coefficienti polinomi differenziali nelle W_i tale che

$$\partial_{k\alpha}\psi - P_{k\alpha}\psi = O(z^{-1})\mathrm{e}^{\Xi(\bar{\boldsymbol{t}},z)}$$

Ma il membro sinistro appartiene a W, quello destro a $H_-^{(m)}g$ e siccome Wg^{-1} è trasverso l'unica possibilità è che siano entrambi nulli; ne segue la tesi. □

Ad ogni punto $W \in \mathrm{Gr}_m$ si associa quindi una soluzione della gerarchia mcKP espressa equivalentemente da ψ_W, ϕ_W o (a meno dell'azione da destra del gruppo $\Gamma_-(m)$) da Q_W.

§4. La funzione tau. Definiamo la funzione tau associata a un sottospazio $W \in \mathrm{Gr}_m$ trasverso come

$$\tau_W(g) := \det(\ell_W g)$$

dove l'applicazione $\ell_W \colon H^{(m)} \to H_-^{(m)}$ è la proiezione su $H_-^{(m)}$ parallela a W. Con gli stessi ragionamenti del caso scalare si vede che vale la proposizione 44: $\tau_W(gh) = \tau_W(g)\tau_{Wg^{-1}}(h)$.

Consideriamo inoltre le applicazioni $R_{\alpha\beta} \colon H_-^{(m)} \to H^{(m)}$ definite nella maniera seguente:

$$R_{\alpha\beta}(z^{-k}e_\gamma) = \begin{cases} -e_\alpha & \text{se } k=1,\, \gamma=\beta \\ z^{-k}e_\gamma & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{147}$$

e poniamo

$$\tau_{W\alpha\beta}(g) := \det(\ell_W g R_{\alpha\beta})$$

Denotiamo $q_{\zeta\alpha}$ l'elemento di Γ_+^m avente $g_\alpha = q_\zeta = 1 - \frac{z}{\zeta}$ e tutti gli altri elementi diagonali pari a 1. In termini delle coordinate $\bar{\boldsymbol{t}}$ il prodotto $gq_{\zeta\alpha}$ corrisponde ad agire come segue:

$$a\bar{\boldsymbol{t}} \mapsto \bar{\boldsymbol{t}} - [\zeta^{-1}]_\alpha := \{t_k^{(\gamma)} - \delta_{\alpha\gamma}\frac{1}{k\zeta^k}\}_{k\geq 1,\, \gamma=1\ldots m}$$

questo è lo shift di Miwa multicomponente.

Proposizione 76. Risulta

$$\psi_W(\boldsymbol{t}, z)_{\alpha\beta} = \begin{cases} \dfrac{\tau_W(\boldsymbol{t} - [z^{-1}]_\alpha)}{\tau_W(\boldsymbol{t})} & \text{se } \alpha = \beta \\ z^{-1}\dfrac{\tau_{W\alpha\beta}(\boldsymbol{t} - [z^{-1}]_\beta)}{\tau_W(\boldsymbol{t})} & \text{se } \alpha \neq \beta \end{cases} \tag{148}$$

La (148) è la versione multicomponente della formula di Sato scalare (97).

§5. La grassmanniana razionale multicomponente. La grassmanniana razionale multicomponente, denotata $\overline{\mathrm{Gr}}_m^{\mathrm{rat}}$, è l'insieme dei sottospazi lineari chiusi $W \subseteq \mathcal{R}^m$ per cui esistono $p, q \in \mathcal{P}$ tali che

$$p\mathcal{P}^m \subseteq W \subseteq q^{-1}\mathcal{P}^m \tag{149}$$

Posto $W' := W/p\mathcal{P}^m$ risulta

$$\operatorname{vdim} W = \dim W' - m \deg p$$

e dunque

$$\operatorname{codim}_{q^{-1}\mathcal{P}^m} W = m \deg q - \operatorname{vdim} W \tag{150}$$

Vedremo che quel fattore m fa tutta la differenza del mondo: quando $m > 1$ non ogni insieme di condizioni può dare origine a un sottospazio di dimensione virtuale zero.

Introduciamo ora la descrizione duale. Il duale di $\mathcal{P}^m$ è $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})^m$ (spazio lineare delle m-uple di successioni di numeri complessi) con il pairing definito nella maniera ovvia. Dato $k \in \{1, \ldots, m\}$, $r \in \mathbb{N}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ sono definiti i funzionali $\mathrm{ev}_{k,r,\lambda}$ dati da

$$\langle \mathrm{ev}_{k,r,\lambda}, (p_1, \ldots, p_m) \rangle = p_k^{(r)}(\lambda)$$

Con una dimostrazione analoga al caso scalare si vede che l'insieme $\mathcal{E}^{(m)}$ di tali funzionali è linearmente indipendente; denotiamo $\mathscr{C}^{(m)}$ il sottospazio da essi generato. Questo sarà il nostro spazio di condizioni differenziali. Definiamo poi

$$\mathscr{C}_{\lambda}^{(m)} := \mathrm{span}\{\mathrm{ev}_{k,r,\lambda}\}_{1 \le k \le m,\, r \in \mathbb{N}}$$

e

$$\mathscr{C}_{r,\lambda}^{(m)} := \mathrm{span}\{\mathrm{ev}_{k,s,\lambda}\}_{1 \le k \le m,\, 0 \le s < r}$$

con la solita convenzione $\mathscr{C}_{0,\lambda}^{(m)} = \{0\}$. Data $c \in \mathscr{C}^{(m)}$ continueremo a chiamare l'insieme finito di punti $\lambda \in \mathbb{C}$ tali che la proiezione di c su $\mathscr{C}_{\lambda}^{(m)}$ è non nulla il *supporto* di c. Gli annullatori dei sottospazi $C \subseteq \mathscr{C}^{(m)}$ e $V \subseteq \mathcal{P}^m$ sono definiti come nel caso scalare.

Proposizione 77. Un sottospazio $W \subseteq \mathcal{R}^m$ appartiene a $\overline{\mathrm{Gr}}_m^{\mathrm{rat}}$ se e solo se esiste un sottospazio finito-dimensionale $C \subseteq \mathscr{C}^{(m)}$ e un polinomio q tale che $W = q^{-1} V_C$.

La dimostrazione è del tutto analoga a quella del caso scalare (proposizione 54). In quest'ultimo, dato C si poteva sempre scegliere il polinomio q in modo tale che risultasse $\mathrm{vdim}\, W = 0$. Ciò non è più possibile in questa sede: la (150) si legge infatti

$$\dim C = m \deg q - \mathrm{vdim}\, W \tag{151}$$

quindi affinchè sia $\mathrm{vdim}\, W = 0$ deve essere $\dim C = m \deg q$, il che è ovviamente possibile se e solo se m divide $\dim C$. Ciò che si può dire in generale è questo: sia $\dim C = ma + b$ con $a \in \mathbb{N}$ e $0 \le b \le m - 1$, allora possiamo fissare $\deg q = a$ nel qual caso risulta $\mathrm{vdim}\, W = -b$; in questo modo a ogni spazio di condizioni risulta associato un sottospazio di dimensione virtuale che va da zero a $-m + 1$.

Restringiamoci ora al caso di indice zero, allora possiamo definire una grassmanniana razionale duale $\mathrm{Gr}_m^{\mathrm{rat}*}$ come l'insieme delle coppie formate da un sottospazio finito-dimensionale C di dimensione am (per qualche $a \in \mathbb{N}$) e un polinomio q di grado a, e la mappa su $\mathrm{Gr}_m^{\mathrm{rat}}$ definita da $(C, q) \mapsto q^{-1} V_C$ è in tal caso surgettiva (ma, come nel caso scalare, non iniettiva).

Denotiamo con Γ_-^m il gruppo formato da m copie indipendenti di Γ_- (che, ricordiamo, in questa sede denota il gruppo moltiplicativo delle funzioni razionali che valgono 1 nel punto all'infinito) visto come sottogruppo di matrici diagonali di $\mathrm{GL}_{\mathrm{res}}(H^{(m)})$; in altri termini $h \in \Gamma_-^m$ si scrive

$$h = \mathrm{diag}(h_1, \ldots, h_m) \text{ con } h_i \in \Gamma_-$$

Allora Γ_-^m agisce su $H^{(m)}$ e quindi su Gr_m, e l'azione in questione è libera (per vederlo basta ragionare come nel caso scalare prendendo ciascuna componente di ordine minimo).

Inoltre dati due sottospazi $W_1 = (C, q_1)^*$ e $W_2 = (C, q_2)^*$ associati al medesimo spazio di condizioni, risulta che $\gamma := \frac{q_1}{q_2} I_m \in \Gamma_-$ fa passare dall'uno all'altro (si noti che q_1 e q_2 sono entrambi di grado am); ne segue che a C fissato è sufficiente considerare il caso in cui, ad esempio, $q = z^a$.

Calcoliamo dunque la funzione di Baker associata al sottospazio $W = (C, z^a)^*$, con $\dim C = ma$. Ragionando come nel caso scalare abbiamo che ψ_W deve avere la forma

$$\psi_W(g, z) = (I_m + \sum_{i=1}^{a} W_i(g) z^{-i}) g(z) \tag{152}$$

infatti deve essere $z^a \psi_{W\alpha} \in V_C$ per ogni $\alpha \in \{1, \ldots, m\}$, ma

$$(z^a \psi)_{\alpha\beta} = \left(z^a \delta_{\alpha\beta} + \sum_{i \geq 1} w^i_{\alpha\beta} z^{a-i} \right) g_\beta(z)$$

Scrivendo i g_β nelle coordinate $\boldsymbol{h}$ e imponendo che tutti questi elementi di matrice siano polinomi si vede che tutte le matrici coefficienti W_i per $i > a$ devono essere nulli, da cui l'espressione (152). Occorre dunque risolvere gli m sistemi lineari nelle incognite W^i dati dalle seguenti uguaglianze al variare di α:

$$\langle c_i, \left(z^a \delta_{\alpha\beta} + \sum_{i \geq 1} w^i_{\alpha\beta} z^{a-i} \right) \mathrm{e}^{\xi(\boldsymbol{t}^\beta, z)} \rangle = 0 \tag{153}$$

dove $i = 1 \ldots ma$ e β è l'indice del vettore riga cui le condizioni si applicano. In altri termini abbiamo una famiglia di m sistemi lineari ciascuno dei quali coinvolge ma equazioni, per un totale di $m^2 a$ equazioni scalari, con incognite a matrici $m \times m$, per un totale di $m^2 a$ incognite scalari $\{w^i_{\alpha\beta}\}$. I coefficienti di tali incognite coinvolgono, come nel caso scalare, funzioni razionali di g e delle sue derivate valutate nel supporto di C.

§6. L'equazione KP matriciale. In ciò che segue ci mettiamo nel caso $A = I$, $U_0 = 0$. Supponiamo di definire per ogni $i \geq 1$ la nuova variabile indipendente

$$\tau_i := \sum_{\gamma=1}^{m} t_i^{(\gamma)}$$

Allora

$$\frac{\partial}{\partial \tau_i} = \sum_{\gamma=1}^{m} \partial_{i\gamma}$$

e l'evoluzione di Q rispetto a questi nuovi tempi è data da

$$\frac{\partial}{\partial \tau_k} Q = \sum_{\alpha=1}^{m} \partial_{k\alpha} Q = \sum_{\alpha=1}^{m} [B_{k\alpha}, Q] = \left[\sum_{\alpha=1}^{m} B_{k\alpha}, Q \right] = [\mathcal{B}_k, Q]$$

dove si è definito $\mathcal{B}_k := \sum_\alpha B_{k\alpha}$.

Ora, la proposizione 72 ci dice che $\mathcal{B}_1 = D$ e $\tau_1 = x$. Per calcolo diretto si ottiene poi che

$$\mathcal{B}_2 = D^2 + 2U_1$$

e le prime equazioni di evoluzione per i coefficienti U_i di Q risultano essere

$$\frac{\partial U_1}{\partial \tau_2} = U_1'' + 2U_2'$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial \tau_2} = U_2'' + 2U_3' + 2U_1 U_1' + 2\left[U_1, U_2\right]$$

Similmente risulta

$$\mathcal{B}_3 = D^3 + 3U_1 D + 3(U_2 + U_1')$$

da cui l'ulteriore equazione

$$\frac{\partial U_1}{\partial \tau_3} = U_1''' + 3U_2'' + 3U_3' + 3U_1' U_1 + 3U_1 U_1'$$

Se ora mettiamo a sistema le tre equazioni così ottenute ed eliminiamo U_3' tra la seconda e la terza otteniamo

$$\begin{cases} \partial_2 U_1 = U_1'' + 2U_2' \\ 3\partial_2 U_2 - 2\partial_3 U_1 = -2U_1''' - 3U_2'' - 6U_1' U_1 + 6\left[U_1, U_2\right] \end{cases}$$

Fin qui si è proceduto esattamente come per ottenere l'equazione KP scalare; tuttavia il passaggio successivo (eliminare U_2) non è replicabile nel nuovo ambito a causa del commutatore che figura nella seconda equazione. Dobbiamo allora accontentarci di scrivere il sistema risultante, posto $u := 2U_1$, $w := U_2$, $y := t_2$ e $t := t_3$, come

$$\begin{cases} 2w_x = \frac{1}{2}u_y - \frac{1}{2}u_{xx} \\ 3w_y - u_t + 3w_{xx} + u_{xxx} + \frac{3}{2}u_x u - 3\left[u, w\right] = 0 \end{cases}$$

Oppure, se siamo disposti a considerare equazioni integro-differenziali, possiamo risolvere la prima equazione per w

$$w = \frac{1}{4}\int^x u_y - \frac{1}{4}u_x$$

e sostituire nella seconda, ottenendo

$$u_t = \frac{1}{4}u_{xxx} + \frac{3}{4}(u^2)_x + \frac{3}{4}\int^x u_{yy} - \frac{3}{4}\left[u, \int^x u_y\right]$$

che viene talvolta detta l'**equazione KP matriciale**.

§7. Alcune riduzioni. In questo paragrafo prendiamo $A = I$ e $U_0 = 0$.

La gerarchia KP multicomponente contiene in sè come riduzioni altre gerarchie notevoli. L'equazione di Sato per i tempi di pedice 1 si scrive

$$\partial_{1\gamma} W_1 = E_\gamma W_1' - E_\gamma W_1^2 + W_1 E_\gamma W_1 + [E_\gamma, W_2]$$

ovvero, in componenti

$$\partial_{1\gamma} w^1_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\gamma}({w^1_{\gamma\beta}}' - \sum_\eta w^1_{\gamma\eta} w^1_{\eta\beta} + w^2_{\gamma\beta}) - \delta_{\beta\gamma} w^2_{\alpha\gamma} + w^1_{\alpha\gamma} w^1_{\gamma\beta}$$

Supponiamo ora di fissare $W_i = 0$ per ogni $i \geq 2$, W_1 a diagonale nulla e di considerare solo i γ diversi da β e α; allora resta il sistema di equazioni

$$\partial_{1\gamma} w^1_{\alpha\beta} = w^1_{\alpha\gamma} w^1_{\gamma\beta}$$

al variare di $\alpha, \beta, \gamma = 1 \dots m$ tutti diversi tra loro ("m-wave equation"); si tratta di un sistema di $m(m-1)(m-2)$ equazioni nelle $m^2 - m$ incognite date dagli elementi fuori diagonale di W_1. Se inoltre vi aggiungiamo l'equazione $W_1' = 0$ (che equivale a $\sum_\gamma \partial_{1\gamma} W_1 = 0$) e la condizione di simmetria su W_1 otteniamo il *sistema di Darboux-Egoroff*.

Viceversa annullando le componenti fuori diagonale e prendendo come variabili gli elementi sulla diagonale si ottiene una catena di Toda generalizzata.

§8. Un approccio più generale. In [KvdL03] la gerarchia KP multicomponente viene approcciata nel seguente modo più generale.

Fissiamo $n \in \mathbb{N}$ una volta per tutte ($n > 1$). Sia $\mathcal{A}$ l'algebra differenziale su $\mathbb{C}$ formata da funzioni liscie (oppure serie di potenze formali) di una variabile privilegiata x e di n famiglie infinite di ulteriori variabili $\boldsymbol{t}^{(i)} := \{t_1^{(i)}, t_2^{(i)}, \dots\}$; indicheremo con $\boldsymbol{t}$ la loro totalità (cioè $\boldsymbol{t} = \{\boldsymbol{t}^{(1)}, \dots, \boldsymbol{t}^{(n)}\}$). Consideriamo infine l'algebra degli operatori pseudo-differenziali a coefficienti in $\mathrm{Mat}_n(\mathcal{A})$; il suo generico elemento si scrive

$$Q = \sum_{i \leq a} Q_i D^i$$

dove Q_i sono matrici $n \times n$ di elementi di $\mathcal{A}$. Notiamo immediatamente che Q può essere visto anche come una matrice $n \times n$ di operatori pseudo-differenziali a coefficienti in $\mathcal{A}$, in altri termini sussiste l'isomorfismo di algebre

$$\Psi(\mathrm{Mat}_n(\mathcal{A})) \cong \mathrm{Mat}_n(\Psi(\mathcal{A}))$$

D'ora in avanti poniamo per brevità $\Psi := \Psi(\mathcal{A})$ e $\Psi^{(n)} := \Psi(\mathrm{Mat}_n(\mathcal{A}))$. L'aggiunto formale su $\Psi^{(n)}$ è definito estendendo per linearità la posizione

$$(P_i D^i)^* := (-D^i) {P_i}^\top$$

Quanto alla traccia di Adler, essa è definita da

$$A \mapsto \int \mathrm{Tr}\,\mathrm{res}\, A \mathrm{d}x$$

Il serializzatore resta definito nella maniera solita per ogni famiglia di tempi:

$$\xi(\boldsymbol{t}^{(i)}, z) := \sum_{k\geq 1} t_k^{(i)} z^k$$

introduciamo però l'abbreviazione

$$\mathrm{e}^{\Xi(\boldsymbol{t},z)} := \mathrm{diag}(\mathrm{e}^{\xi(\boldsymbol{t}^{(1)},z)}, \dots, \mathrm{e}^{\xi(\boldsymbol{t}^{(n)},z)})$$

Il modulo delle funzioni di Baker, $U^{\pm}$, sarà il modulo delle funzioni a valori matriciali del tipo

$$\mathrm{e}^{\pm\Xi(\boldsymbol{t},z)} \sum_{j\leq N} P_j z^j$$

con $P_j \in \mathrm{Mat}_n$. L'azione di D su funzioni di questo tipo è quella ovvia:

$$D.\mathrm{e}^{\pm\Xi(\boldsymbol{t},z)} = (\pm z)\mathrm{e}^{\pm\Xi(\boldsymbol{t},z)}$$

Consideriamo ora il gruppo formale $I_n + \Psi^{(n)}$. Il generico elemento è del tipo

$$\phi = I_n + \sum_{j\geq 1} W_j D^{-j}$$

e i coefficienti del suo inverso sono dati dalle solite espressioni già ricavate:

$$\phi^{-1} = I_n - W_1 D^{-1} + (W_1^2 - W_2)D^{-2} + \dots$$

Si definisce poi la funzione tau come segue:

$$\frac{\partial}{\partial t_m^{(j)}} \log \tau_\alpha(x) = \operatorname*{res}_{z=0} z^m \left(\frac{\partial}{\partial z} - \sum_{k\geq 1} z^{-k-1} \frac{\partial}{\partial t_k^{(j)}} \right) \log P_{jj}^{+}(\alpha, \boldsymbol{t}_1, \dots, \boldsymbol{t}_n, z)$$

Sia L un reticolo su $\mathbb{Z}$ con base $\delta_1, \dots, \delta_n$ e forma bilineare simmetrica $(\delta_i|\delta_j) = \delta_{ij}$. Definiamo

$$\epsilon_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{se } i > j \\ 1 & \text{se } i \leq j \end{cases}$$

e una funzione $\epsilon \colon L \times L \to \{\pm 1\}$ come segue:

$$\epsilon(\delta_i, \delta_j) = \epsilon_{ij}$$

Sia poi $\delta = \delta_1 + \dots + \delta_n$, $M = \{\, \gamma \in L \mid (\delta|\gamma) = 0 \,\}$ e

$$\Delta = \{\, \alpha_{ij} := \delta_i - \delta_j \mid i, j = 1 \dots n,\ i \neq j \,\}$$

Chiaramente M è il reticolo delle radici di $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ e Δ è il suo sistema di radici.

Indichiamo con E_{ij} la matrice che ha come unico elemento non nullo un 1 nella posizione (i,j). Consideriamo i seguenti operatori pseudo-differenziali:

$$P^{\pm}(\alpha,x,\bar{\boldsymbol{t}}) := I_n + \sum_{m\geq 1} W_m^{\pm}(\alpha,x,\bar{\boldsymbol{t}})D^{-m}$$

$$R(\alpha,z) = \sum_{i=1}^{n} \epsilon(\delta_i,\alpha)E_{ii}z^{(\delta_i|\alpha)}$$

$$S(\bar{\boldsymbol{t}},z) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{\sum_{j\geq 1} t_j^{(i)}z^j}E_{ii}$$

A questo stadio $W^{\pm}$ sono semplicemente degli elementi di $\mathrm{Mat}_n(\mathcal{C})$ che dipendono dalla radice α e da n famiglie numerabili di parametri $\boldsymbol{t}^{(1)},\ldots,\boldsymbol{t}^{(n)}$ che indicheremo collettivamente con la notazione $\bar{\boldsymbol{t}}$.

Nel seguito scriveremo brevemente $P := P^+$. Si noti che $P^{\pm}$ sono elementi del gruppo formale $I_n + \Psi^{(n)}$.

L'**equazione di Sato** determinata da P è:

$$\frac{\partial}{\partial t_k^{(j)}}P = -(PE_{jj}D^kP^{-1})_-P \quad \text{per } j = 1\ldots n$$

Questo sistema di n equazioni definisce il k**-esimo flusso KP matriciale** unitamente alla condizione di consistenza

$$(P^+(\alpha,x,\bar{\boldsymbol{t}})R(\alpha-\beta)S(x-x')P^-(\beta,x,\bar{\boldsymbol{t}}')^*)_- = 0$$

per ogni α,β nel supporto di τ.(?)

Ancora, definiamo

$$L(\alpha,x,\bar{\boldsymbol{t}}) := PDP^{-1}$$

$$C^{(j)}(\alpha,x,\bar{\boldsymbol{t}}) := PE_{jj}P^{-1}$$

$$L^{(j)}(\alpha,x,\bar{\boldsymbol{t}}) := C^{(j)}L = PE_{jj}DP^{-1}$$

$$B_m(\alpha,x,\bar{\boldsymbol{t}}) := L_+^m = (PD^mP^{-1})_+$$

$$B_m^{(j)}(\alpha,x,\bar{\boldsymbol{t}}) := (L^{(j)})_+^m = (PE_{jj}D^mP^{-1})_+$$

Allora l'equazione di Sato si scrive

$$\frac{\partial}{\partial t_k^{(j)}}P = B_k^{(j)}P - PE_{jj}D^k$$

Possiamo anche invertire la logica e partire da operatori pseudo-differenziali della forma

$$L = I_nD + \sum_j U^{(j)}(x,\bar{\boldsymbol{t}})D^{-j}$$

$$C^{(i)} = E_{ii} + \sum_j C^{(i,j)}(x, \bar{\boldsymbol{t}}) D^{-j} \quad (i = 1 \dots n)$$

tali che

$$\sum_{i=1}^{n} C^{(i)} = I_n \qquad C^{(i)} L = L C^{(i)} \qquad C^{(i)} C^{(j)} = \delta_{ij} C^{(i)}$$

Allora il seguente sistema di equazioni (con $P \in I_n + \Psi_-$):

$$\begin{cases} LP = PD \\ C^{(i)} P = P E_{ii} \\ \frac{\partial P}{\partial t_k^{(i)}} = -(L^{(i)})_-^k P \end{cases}$$

(dove $L^{(i)} := C^{(i)} L$) ha soluzione se e solo se esiste una funzione W della forma

$$W(x, \bar{\boldsymbol{t}}, z) = (I_n + \sum_j W^{(j)}(x, \bar{\boldsymbol{t}}) z^{-j}) \mathrm{e}^{z \cdot \bar{\boldsymbol{t}}}$$

che soddisfa il sistema di equazioni (lineari)

$$\begin{cases} LW = zW \\ C^{(i)} W = W E_{ii} \\ \frac{\partial W}{\partial t_k^{(i)}} = B_k^{(i)} W \end{cases}$$

ed è unica a meno di moltiplicazione da destra per una matrice diagonale del tipo

$$e^{-\sum_j a_j z^{-j}/j}$$

con a_j sono matrici diagonali sui complessi.

Similmente la collezione formata da L e dai $C^{(i)}$ determina P a meno di moltiplicazione da destra per un operatore pseudo-differenziale a coefficienti costanti.

Se ne conclude che possiamo porre il sistema in forma "alla Lax" nella maniera seguente:

$$\frac{\partial L}{\partial t_k^{(j)}} = \left[B_k^{(j)}, L\right]$$

$$\frac{\partial C^{(i)}}{\partial t_k^{(j)}} = \left[B_k^{(j)}, C^{(i)}\right]$$

o, equivalentemente,

$$\frac{\partial L^{(i)}}{\partial t_k^{(j)}} = \left[B_k^{(j)}, L^{(i)}\right]$$

A loro volta queste sono equivalenti alla seguente formulazione alla Zakharov-Shabat:

$$\frac{\partial B_l^{(i)}}{\partial t_k^{(j)}} - \frac{\partial B_k^{(j)}}{\partial t_l^{(i)}} = \left[B_k^{(j)}, B_l^{(i)}\right]$$

e analoga per $L^{(i)}$.

6 Altri argomenti

§1. Ancora sulle grassmanniane finito-dimensionali. Ci chiediamo ora quali sono le equazioni che definiscono l'immagine di Π in $\mathbb{P}(\Lambda^k(V))$; ciò equivale a caratterizzare gli elementi *decomponibili* di $\Lambda^k(V)$. A tale scopo osserviamo anzitutto che, dato $\omega \in \Lambda^k(V)$ e $v \in V$, risulta $\omega = v \wedge \varphi$ per qualche $\varphi \in \Lambda^{k-1}(V)$ se e solo se $\omega \wedge v = 0$. Allora ω è decomponibile se e solo se tale processo si può ripetere k volte, ovvero lo spazio dei vettori che dividono ω ha dimensione k. Dunque $[\omega] \in \operatorname{im}\Pi$ se e solo se il rango dell'applicazione $\varphi(\omega)\colon V \to \Lambda^{k+1}(V)$ definita da $v \mapsto \omega \wedge v$ è pari a $n-k$. D'altro canto il rango di questa applicazione non è mai strettamente minore di $n-k$, e quindi $[\omega] \in \mathrm{Gr}(k, V)$ se e solo se il rango di $\varphi(\omega)$ è minore o uguale a $n-k$. Ora, la mappa $\varphi\colon \Lambda^k(V) \to \hom(V, \Lambda^{k+1}(V))$ che manda ω in $\varphi(\omega)$ è lineare, cioè gli elementi della matrice $\varphi(\omega)$ sono coordinate omogenee su $\mathbb{P}(\Lambda^k(V))$; possiamo allora dire che $\mathrm{Gr}(k, V)$ è la sottovarietà di $\mathbb{P}(\Lambda^k(V))$ definita dall'annullarsi degli $(n-k+1) \times (n-k+1)$ minori di questa matrice.

Consideriamo ora l'identificazione naturale tra $\Lambda^k(V)$ e $\Lambda^{n-k}(V^*)$ (a meno di scalari, ma ciò è sufficiente). Allora un elemento $\omega \in \Lambda^k(V)$ corrisponde a $\omega^* \in \Lambda^{n-k}(V^*)$ e possiamo costruire una mappa $\psi(\omega)\colon V^* \to \Lambda^{n-k+1}(V^*)$ tramite la posizione $v^* \mapsto v^* \wedge \omega^*$. Per lo stesso argomento di cui sopra ω è decomponibile se e solo se $\psi(\omega)$ ha rango al massimo k, e in tal caso il nucleo della mappa $\varphi(\omega)$, che è il sottospazio W stesso, è esattamente l'annichilatore del nucleo di $\psi(\omega)$; equivalentemente, le immagini delle mappe trasposte

$$\varphi(\omega)^\top\colon \Lambda^{k+1}(V^*) \to V^*$$
$$\psi(\omega)^\top\colon \Lambda^{n-k+1}(V) \to V$$

si annichilano a vicenda. Dunque $[\omega] \in \mathrm{Gr}(k, V)$ se e solo se per ogni coppia $\alpha \in \Lambda^{k+1}(V^*)$, $\beta \in \Lambda^{n-k+1}(V)$ la contrazione

$$\Xi_{\alpha,\beta}(\omega) = \langle \varphi(\omega)^\top(\alpha), \psi(\omega)^\top(\beta) \rangle = 0$$

Questi sono polinomi quadratici il cui luogo degli zeri è $\mathrm{Gr}(k, V)$ (relazioni di Plücker).

Nel caso particolare $k = 2$ risulta che ω è decomponibile se e solo se $\omega \wedge \omega = 0$, e quindi la grassmanniana $\mathrm{Gr}(2, V)$ è una varietà determinata dall'intersezione di quadriche (infatti tale equazione rappresenta $\binom{n}{4}$ relazioni quadratiche indipendenti).

§2. La corrispondenza di Krichever.

Definizione 27. Un **dato di Krichever** è una quintupla $(X, \mathcal{L}, x_\infty, z, \varphi)$ formata da:
1) una curva algebrica complessa X completa e irriducibile;
2) un fascio coerente $\mathcal{L}$ privo di torsione e di rango 1 su X;
3) un punto non singolare $x_\infty \in X$;
4) una funzione $z\colon X \to \mathbb{P}^1$ tale che z^{-1} è un parametro locale in x_∞ su X;
5) una banalizzazione locale φ di $\mathcal{L}$ regolare in un intorno di x_∞.

Siccome x_∞ è non singolare possiamo supporre che esista un intorno (chiuso) X_∞ di x_∞ tale che la restrizione di z ad esso sia un isomorfismo "genuino" di X_∞ nel disco $D_\infty(R)$ in $\mathbb{P}^1$ per qualche $R \in \mathbb{R}^+$; inoltre possiamo scegliere questo R in modo tale che la banalizzazione φ sia regolare in X_∞, che diventa quindi l'intorno desiderato.

Con queste convenzioni possiamo usare φ per identificare le sezioni di $\mathcal{L}$ su X_∞ (o suoi sottoinsiemi) con applicazioni a valori complessi. Se denotiamo con γ la controimmagine del cerchio $S^1(R)$ in X secondo z e con X_0 il complementare dell'interno di X_∞ abbiamo allora che la coppia di chiusi X_0 e X_∞ coprono X e la loro intersezione è proprio γ.

A ogni dato di Krichever $\kappa = (X, \mathcal{L}, x_\infty, z, \varphi)$ possiamo associare un sottospazio lineare W_κ di $H = L^2(S^1, \mathbb{C})$ che si ottiene prendendo la chiusura in L^2 dello spazio delle funzioni analitiche $S^1(R) \to \mathbb{C}$ che si estendono a sezioni di $\mathcal{L}$ su X_0.

Proposizione 78. Per ogni dato di Krichever κ risulta $W_\kappa \in \mathrm{Gr}$ e $\operatorname{vdim} W_\kappa = \chi(\mathcal{L}) - 1$.

(Qui $\chi(\mathcal{L}) = \dim H^0(X; \mathcal{L}) - \dim H^1(X; \mathcal{L})$ è la caratteristica di Eulero del fascio $\mathcal{L}$.)

Dimostrazione. Vedi [SW85, Prop. 6.1]. $\square$

Ne segue che i sottospazi di dimensione virtuale zero sono esattamente quelli che vengono da fasci di caratteristica uno. Ora, se $\mathcal{L}$ è un fibrato di rette, il teorema di Riemann-Roch ci dice che

$$\chi(\mathcal{L}) = 1 - g + c(\mathcal{L})$$

e quindi $\operatorname{vdim} W_\kappa = c(\mathcal{L}) - g$; in particolare per avere un sottospazio di dimensione virtuale zero occorre che sia $c(\mathcal{L}) = g$. Possiamo dunque ottenere una soluzione della gerarchia KP per ogni dato di Krichever siffatto.

In pratica quello che fa Krichever (per curve X non singolari) è prendere un divisore positivo e non speciale di X di grado pari al genere di X, cioè un insieme di punti $\mathcal{D} = \{p_1, \ldots, p_g\}$ di X in posizione generica (cioè tali che il fibrato $\mathcal{L}$ che corrisponde a $\mathcal{D}$ ha un'unica sezione olomorfa che si annulla precisamente nei p_i); tale sezione definisce allora una banalizzazione di $\mathcal{L}$ sul complementare di $\mathcal{D}$, in particolare su un intorno X_∞ di x_∞ scelto in modo tale che tutti i p_i ne siano al di fuori. (Si deve anche assumere che $p_i \neq x_\infty$ per ogni i.) Usando questa banalizzazione la costruzione precedente coincide con quella di Krichever. Si considerano cioè le funzioni meromorfe con poli in questi punti e una singolarità essenziale in x_∞; questi dati definiscono un unico sottospazio W trasverso. Gli elementi di W sono i valori di bordo di funzioni meromorfe su X_0 con poli nei punti scelti.

La corrispondenza di Krichever non è uno a uno per la seguente ragione: supponiamo che $\pi \colon X' \to X$ sia una equivalenza birazionale, allora si ottiene lo stesso spazio da un fascio $\mathcal{L}'$ su X' e dalla sua immagine diretta $\mathcal{L} = \pi_*(\mathcal{L}')$ su X. Questa ambiguità può essere evitata se conveniamo di considerare solo i fasci privi di torsione *massimali* su X, cioè quelli che non si possono ottenere come immagini dirette di un fascio su una curva "meno singolare". Serve una descrizione migliore di questi fasci, ed è la seguente: i fasci privi di torsione di rango 1 su X (di caratteristica fissata) formano uno spazio dei moduli compatto M su cui lo jacobiano generalizzato di X agisce per prodotto tensore, allora:

Proposizione 79. I fasci massimali coincidono con la parte di M su cui lo jacobiano agisce liberamente.

Ogni fibrato di rette è un fascio massimale, e se X ha solo singolarità planari questi sono gli unici, poichè in tal caso M è una varietà irriducibile che contiene i fibrati di rette come un aperto di Zariski. In generale ce ne sono molti altri.

Per ogni $W \in \mathrm{Gr}$ definiamo A_W come l'anello delle funzioni analitiche $f\colon S^1 \to \mathbb{C}$ tali che $f.W^{\mathrm{alg}} \subseteq W^{\mathrm{alg}}$. In altri termini, A_W è lo "stabilizzatore" di W^{alg}. Si noti che in generale esso contiene solo le costanti, cioè è isomorfo a $\mathbb{C}$.

Proposizione 80. La corrispondenza di Krichever definisce una bigezione tra classi di isomorfismo di dati di Krichever e un certo sottoinsieme di Gr.

Dimostrazione. Supponiamo dato $W \in \mathrm{Gr}$ che arriva da un dato di Krichever $(X, \mathcal{L}, x_\infty, z, \varphi)$ con $\mathcal{L}$ massimale; dobbiamo ricostruire il dato da W a meno di isomorfismo. Cominciamo col notare che W^{alg} può essere identificato con lo spazio delle sezioni algebriche di $\mathcal{L}$ su $X \setminus \{x_\infty\}$. Sia A l'anello delle coordinate di questa curva affine; allora W^{alg} è un A-modulo privo di torsione e di rango 1 che corrisponde al fascio $\mathcal{L}$ ristretto a $X \setminus \{x_\infty\}$. D'altro canto A_W è un'algebra che contiene A (identificando le funzioni di A con le loro restrizioni a S^1) e W^{alg} è un A_W-modulo fedele. Siccome W è privo di torsione e ha rango 1 come A-modulo, ne segue che A_W si può identificare con un sottoanello integrale del campo dei quozienti di A. Allora $\operatorname{Spec} A_W$ è una curva del tipo $X' \setminus \{x_\infty\}$, con X' completa, che si proietta birazionalmente su $X \setminus \{x_\infty\}$; e quindi se $\mathcal{L}$ è massimale deve essere $A_W = A$. Abbiamo così ricostruito la curva X, il punto x_∞ e la restrizione di $\mathcal{L}$ su $X \setminus \{x_\infty\}$. Infine l'inclusione $W^{\mathrm{alg}} \subseteq \mathbb{C}[z] \oplus H_-$ definisce una banalizzazione di $\mathcal{L}$ su $X_\infty \setminus \{x_\infty\}$ (e quindi l'estensione di $\mathcal{L}$ a X); infatti se $|\zeta| > 1$ la valutazione in ζ definisce un'applicazione $W^{\mathrm{alg}} \to \mathbb{C}$ che induce un isomorfismo della fibra di $\mathcal{L}$ in ζ con $\mathbb{C}$. (La fibra è canonicamente $W^{\mathrm{alg}}/mW^{\mathrm{alg}}$, dove $m \subseteq A_W$ è l'ideale delle funzioni che si annullano in ζ.) □

Gli spazi raggiunti dalla corrispondenza di Krichever sono esattamente quei $W \in \mathrm{Gr}$ tali che A_W contiene un elemento di ciascun ordine sufficientemente grande, ovvero tali che il A_W-modulo W^{alg} ha rango uno. Infatti gli anelli delle coordinate di curve irriducibili della forma $X \setminus \{x_\infty\}$ con X completa e x_∞ non singolare sono caratterizzate, come domini di integrità, semplicemente dall'esistenza di una filtrazione

$$\mathbb{C} = A_0 \subseteq A_1 \subseteq \cdots \subseteq A$$

tale che $A_i A_j \subseteq A_{i+j}$, $\dim A_k/A_{k-1} \leq 1$ per ogni k e $\dim A_k/A_{k-1} = 1$ definitivamente in k.

Si noti che per ogni $W \in \mathrm{Gr}$ resta definita una realizzazione di A_W come anello commutativo di operatori differenziali: infatti

Proposizione 81. Per ogni $f \in A_W$ esiste ed è unico l'operatore differenziale L_f tale che

$$L_f \psi_W = f(z) \psi_W$$

Se $W \in \mathrm{Gr}^{(n)}$ allora $z^n \in A_W$ e $L_{z^n} = L_W$. In generale l'ordine di L_f è uguale all'ordine di f.

§3. Curve razionali.

Proposizione 82. La corrispondenza di Krichever stabilisce una corrispondenza biunivoca tra i sottospazi $W \in \mathrm{Gr}_{\mathrm{rk1}}$ e gli elementi $[X, \mathcal{L}, x_\infty, z, \varphi] \in \mathcal{K}/\cong$ tali che:
1) X è una curva razionale;
2) z è un parametro razionale su X;
3) φ si estende a una banalizzazione algebrica di $\mathcal{L}$ su un aperto di Zariski che contiene il disco X_∞.

Per "parametro razionale" si intende ciò che segue. Per il punto (1) esiste una funzione $f\colon \mathbb{P}^1 \to X$ che è un isomorfismo al di fuori della controimmagine dell'insieme dei punti singolari di X; inoltre possiamo scegliere $f(\infty) = x_\infty$. Un parametro razionale è l'inverso di una simile mappa f in un qualche intorno di x_∞; il suo dominio allora si estende all'intera parte non singolare di X. Questo parametro è determinato a meno di un cambio di coordinate lineare $z \mapsto az + b$.

Dimostrazione. Sia dato $W \in \mathrm{Gr}_{\mathrm{rk1}}$ con polinomi p e q tali che $pH_+ \subseteq W \subseteq q^{-1}H_+$; allora

$$p\mathcal{P} \subseteq W^{\mathrm{alg}} \subseteq q^{-1}\mathcal{P}$$

e quindi

$$pq\mathcal{P} \subseteq A_W \subseteq (pq)^{-1}\mathcal{P}$$

e siccome A_W è un anello risulta in effetti $pq\mathcal{P} \subseteq A_W \subseteq \mathcal{P}$. Allora l'inclusione $A_W \to \mathcal{P}$ determina un isomorfismo di campi quoziente, il che mostra che la curva $X \setminus \{x_\infty\} = \operatorname{Spec} A_W$ è razionale e z è un parametro razionale su X. Inoltre dal primo sandwich segue che W^{alg} ha rango 1 come A_W-modulo, quindi il corrispondente fascio $\mathcal{L}$ su X ha rango 1. Resta da dimostrare la (3)...

Viceversa supponiamo dato il dato di Krichever come da ipotesi e dimostriamo che $W \in \mathrm{Gr}_{\mathrm{rk1}}$. Sia $B \subseteq X$ l'insieme di punti su cui φ non è definito, più se necessario i punti singolari di X. Sia $\{z_1, \ldots, z_r\}$ la controimmagine di B secondo la mappa f la cui inversa è z. Allora possiamo identificare le sezioni di $\mathcal{L}$ su $X \setminus B$ con le sezioni di un fibrato di rette banalizzato su $\mathbb{P}^1 \setminus \{z_1, \ldots, z_r\}$. Allora W^{alg}, che è lo spazio delle sezioni di $\mathcal{L}$ su $X \setminus \{x_\infty\}$, si identifica con un sottospazio dello spazio delle funzioni razionali di z olomorfe eccetto che per poli di ordine specificato ν_i nei punti z_i. Infatti W^{alg} è il sottospazio che consiste delle funzioni le cui serie di Laurent nei punti z_i soddisfano un qualche insieme finito di condizioni lineari. Se definiamo $p := \prod(z - z_i)^{\mu_i}$ con μ_i suff. alto, allora ciascun elemento di $p\mathcal{P}$ soddisfa senz'altro tali condizioni. Se infine poniamo $q := \prod(z - z_i)^{\nu_i}$ abbiamo che $p\mathcal{P} \subseteq W^{\mathrm{alg}} \subseteq q^{-1}\mathcal{P}$, e passando alle chiusure in L^2 si ha la tesi. $\square$

In particolare prendendo $p = q = z^k$ si ottiene che:

Proposizione 83. La corrispondenza di Krichever stabilisce una corrispondenza biunivoca tra i sottospazi $W \in \mathrm{Gr}_0$ e gli elementi $[X, \mathcal{L}, x_\infty, z, \varphi] \in \mathcal{K}/\cong$ tali che:
1) X è una curva razionale con una e una sola singolarità irriducibile x_0;
2) z è un parametro razionale su X tale che $x_0 \mapsto 0$;
3) φ si estende a una banalizzazione algebrica di $\mathcal{L}$ su $X \setminus \{x_0\}$.

Una singolarità è irriducibile se risolvendola si ottiene ancora un solo punto (singolarità di tipo cuspidale), quindi z è in effetti una bigezione tra X e $\mathbb{P}^1$.

Si noti che in questo caso z e φ sono entrambe univocamente determinate a meno di moltiplicazione per una costante non nulla; questo significa che la corrispondenza tra spazi in Gr_0 e soluzioni della gerarchia KP è uno a uno.

In questo contesto più piccolo possiamo dire qualcosa di più. Ad esempio se prendiamo $W = H_S$ (con $\operatorname{vdim} S = 0$) allora W^{alg} è generato da $\{z^s\}_{s \in S}$; se R è il semigruppo dei naturali (non nulli) r tali che $S + r \subseteq S$, allora A_W è l'algebra generata da 1 e $z^r_{r \in R}$, e l'ideale massimale di A_W che corrisponde al punto singolare $z = 0$ è generato da $\{z^r\}_{r \in R}$. La dimensione della fibra $W^{\mathrm{alg}}/mW^{\mathrm{alg}}$ del fascio $\mathcal{L}$ su 0 è quindi pari al numero di elementi di $S \setminus S'$, dove si è posto

$$S' = \bigcup_{r \in R} (S + r)$$

A meno che questo numero non sia 1, il fascio massimale $\mathcal{L}$ non è un fibrato di rette. Ad esempio quando $S = \{-1, 0, 2, \dots\}$ risulta $R = \{3, \dots\}$ e $S' = \{2, \dots\}$; in tal caso la dimensione della fibra singolare di $\mathcal{L}$ è due. Tra l'altro $A_W = \mathbb{C}[z^3, z^4, z^5]$ e quindi la singolarità non è planare, in accordo con quanto notato in precedenza.

Se ci restringiamo ulteriormente a $\mathrm{Gr}_0^{(2)}$ possiamo classificare le classi di isomorfismo dei dati di Krichever perchè ci sono numerose semplificazioni, la più importante essendo che le orbite del gruppo Γ_+ coincidono con le celle. Le celle sono indiciate dai $S \in \mathscr{S}$ tali che $S + 2 \subseteq S$, gli unici insiemi siffatti sono del tipo

$$S_k = \{-k, -k+2, \dots, k-2, k, k+1, \dots\}$$

al variare di $k \in \mathbb{N}$. Se C_k è la corrispondente cella allora essa ha dimensione complessa k e consiste dei W di vdim zero tali che $z^k H_+ \subseteq W \subseteq z^{-k} H_+$ con k minimale. Questi formano una cella perchè un tale spazio contiene elementi del tipo

$$w = z^{-k} + \alpha_1 z^{-k+1} + \dots + \alpha_{2k-1} z^{k-1}$$

e quindi $\{w, z^2 w, \dots, z^{2k-2} w\}$ è una base di $W/z^k H_+$. Allora w determina W ma non vale il viceversa: i coefficienti α possono essere normalizzati in più modi, il più conveniente dei quali sarà il seguente:

$$w = z^{-k} e^{a_1 z + \dots + a_k z^{2k-1}}$$

La corrispondenza $W \mapsto (a_1, \dots, a_k)$ da un isomorfismo $C_k \to \mathbb{C}^k$; in tale isomorfismo il "centro" della cella è proprio lo spazio H_{S_k}. Da notare che il sottogruppo $\{e^{tz^{2r-1}}\}$ di Γ_+ agisce su C_k traslando la r-esima coordinata a_r, in particolare C_k è proprio l'orbita di H_{S_k} sotto Γ_+.

§4. La corrispondenza fermioni-bosoni. In questa Sezione lavoriamo nella grassmanniana di Hilbert-Schmidt. Su di essa abbiamo il fibrato Det definito in §3.1 e di conseguenza il suo duale, che ammette uno spazio (infinito-dimensionale) di sezioni olomorfe Γ. Su tale spazio (visto come spazio vettoriale topologico completo e localmente convesso, con la topologia della convergenza uniforme sui compatti) agisce in maniera continua il gruppo $\tilde{\mathrm{GL}}_{\mathrm{res}}$. Questa si dice la **rappresentazione fondamentale** di $\tilde{\mathrm{GL}}_{\mathrm{res}}$.

Possiamo dare due descrizioni esplicite di tale spazio: come algebra esterna "completata" di $H_+ \oplus \bar{H}_-$ (dove $\bar{H}_-$ è lo spazio complesso coniugato di H_-), oppure come somma diretta di algebre simmetriche (ciascuna delle quali si può identificare con un anello di funzioni simmetriche).

Consideriamo anzitutto il caso finito-dimensionale. Sia Det il fibrato determinante su $\mathrm{Gr}(k, V)$; esso non ha sezioni olomorfe globali non nulle, ma il suo duale sì e sussiste la seguente:

Proposizione 84. Lo spazio delle sezioni olomorfe globali di Det^* è canonicamente isomorfo a $\Lambda^k(V^*)$.

Dimostrazione. Una sezione olomorfa di Det^* è un'applicazione olomorfa $s\colon \mathrm{Det} \to \mathbb{C}$ lineare su ciascuna fibra. Consideriamo l'applicazione $\Lambda^k(V^*) \to \Gamma(\mathrm{Det}^*)$ che manda $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k \in \Lambda^k(V^*)$ nella sezione definita da

$$\lambda[v_1 \wedge \cdots \wedge v_k] \mapsto \langle \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k, \lambda v_1 \wedge \cdots \wedge v_k \rangle = \lambda \det\langle \alpha_i, v_j \rangle$$

Questa applicazione è iniettiva. Sia U l'aperto di V^k formato dalle k-uple di vettori linearmente indipendenti, allora c'è una mappa $\pi\colon U \to \mathrm{Det}$. Se s è una sezione di Det^* allora occorre mostrare che la composizione $s \circ \pi$ si estende a una mappa multilineare $V^k \to \mathbb{C}$. Per vederlo consideriamo l'applicazione $v_1 \mapsto s(\pi(v_1, \ldots, v_k))$; è una funzione olomorfa definita sul complementare del sottospazio $\mathrm{span}\{v_2, \ldots, v_k\}$ di V, e soddisfa $f(\lambda v_1) = \lambda f(v_1)$ per ogni $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Il sottospazio in questione ha codimensione maggiore di uno (perchè possiamo assumere che sia $k < n$) e quindi per il teorema di Hartogs f si estende a funzione olomorfa su tutto V. Allora possiamo espandere f in serie di Taylor attorno all'origine, e come già notato f deve essere funzione lineare. Trattando le altre variabili allo stesso modo si vede che $s \circ \pi$ è multilineare. $\square$

Prendendo tutte le componenti connesse di $\mathrm{Gr}(V)$ si ottiene l'intera algebra esterna $\Lambda(V^*)$.

Passiamo ora al caso infinito-dimensionale. Da un punto di vista puramente algebrico le cose si possono vedere così. Consideriamo per il momento la grassmanniana dei sottospazi commensurabili con H_+. Prendiamo sottospazi A e B tali che $B \subseteq H_+ \subseteq A$ e $\dim \frac{A}{B} < \infty$; se W è un qualunque altro sottospazio paninato tra A e B allora la fibra del fibrato determinante in W è canonicamente isomorfa a $\det \frac{W}{B} \otimes \det(\frac{H_+}{B})^*$, e quindi la restrizione di Det^* alla grassmanniana finito-dimensionale $\mathrm{Gr}(\frac{A}{B})$ è

$$\mathrm{Det}^*_{\frac{A}{B}} \otimes \det \frac{H_+}{B}$$

dove $\mathrm{Det}_{\frac{A}{B}}$ è il fibrato determinante di $\mathrm{Gr}(\frac{A}{B})$ e lo spazio unidimensionale $\det \frac{H_+}{B}$ è visto come fibrato in rette banale. Lo spazio di sezioni di questo fibrato è

$$\Lambda((\frac{A}{B})^*) \otimes \det \frac{H_+}{B} \cong \Lambda((\frac{A}{H_+})^* \oplus (\frac{H_+}{B})^*) \otimes \det \frac{H_+}{B} \cong \Lambda((\frac{A}{H_+})^*) \otimes \Lambda((\frac{H_+}{B})^*) \otimes \det \frac{H_+}{B}$$

$$\cong \Lambda((\frac{A}{H_+})^*) \otimes \Lambda(\frac{H_+}{B})) \cong \Lambda((\frac{A}{H_+})^* \oplus \frac{H_+}{B})$$

dove tutti questi isomorfismi sono canonici. Se ora costruiamo il sistema proiettivo di algebre esterne associato al crescere di A e al diminuire di B e ne prendiamo il limite otteniamo uno spazio che si mappa canonicamente con Γ. Questo limite non è altro che il completamento dello spazio lineare $\Lambda((\frac{H}{H_+})^* \oplus H_+)$ nella topologia in cui gli intorni di zero sono i sottospazi di codimensione finita. In tutto questo discorso il prodotto interno presente su H non gioca alcun ruolo.

Per essere più espliciti introduciamo la base canonica $\{z^k\}$ di H. Definiamo $H_k = z^k H_+$; allora abbiamo una filtrazione $H_k \subseteq H_{k-1}$ su $\mathbb{Z}$. Se un sottospazio è compreso tra H_k e H_{-k} allora è un elemento di $\mathrm{Gr}(H_{-n,n})$, e quindi queste grassmanniane finito-dimensionali formano una sequenza crescente di sottospazi di $\overline{\mathrm{Gr}}$; la loro unione, che è $\overline{\mathrm{Gr}}_0$, è densa in $\overline{\mathrm{Gr}}$. Il fibrato Det si restringe al fibrato determinante su $\mathrm{Gr}(H_{-n,n})$, e la restrizione delle sezioni dà una mappa

$$\Gamma \to \varprojlim_n \Lambda(H^*_{-n,n})$$

che è iniettiva perchè l'unione delle $\mathrm{Gr}(H_{-n,n})$ è densa. Lo spazio di arrivo può essere identificato naturalmente con un completamento dell'algebra esterna non di H^* ma di $H^*_- \oplus H_+$, o equivalentemente $\bar{H}_- \oplus H_+$.

L'inclusione $\mathrm{Gr}(H_{-n,n}) \to \mathrm{Gr}(H_{-n-1,n+1})$ manda la p-esima componente connessa nella $(p+1)$-esima, quindi il corrispondente morfismo di restrizione $\Lambda(H^*_{-n-1,n+1}) \to \Lambda(H^*_{-n,n})$ abbassa il grado di uno, e infatti è la derivazione associata all'elemento z^n della base di H_n/H_{n+1}. Ora, $H_{-n,n} = H_{-n,0} \oplus H_{0,n}$ e quindi

$$\Lambda(H^*_{-n,n}) \cong \Lambda(H^*_{-n,0}) \otimes \Lambda(H^*_{0,n})$$

se identifichiamo $\Lambda(H_{0,n})$ con $\Lambda(H^*_{0,n})$ tramite

$$\xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_p \mapsto D_{\xi_1} \ldots D_{\xi_p}(1 \wedge z \wedge \cdots \wedge z^{n-1})$$

(che manda Λ^p in Λ^{n-p}) abbiamo il diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
\Lambda(H^*_{-n-1,0}) \otimes \Lambda(H_{0,n+1}) \arrow[r] \arrow[d] & \Lambda(H^*_{-n-1,n+1}) \arrow[d] \\
\Lambda(H^*_{-n,0}) \otimes \Lambda(H_{0,n}) \arrow[r] & \Lambda(H^*_{-n,n})
\end{tikzcd}$$

dove la mappa a destra è quella del sistema proiettivo e quella a sinistra è indotta dall'inclusione $H_{-n,0} \to H_{-n-1,0}$ e dalla proiezione $H_{0,n+1} \to H_{0,n}$. Allora il limite proiettivo può essere identificato con $\Lambda(H_-^*) \otimes \Lambda(H_+) = \Lambda(H_-^* \oplus H_+)$ nella maniera seguente: decomponiamo gli spazi in esame secondo l'azione del cerchio $\mathbb{T}$ su H tramite rotazione. Ora, l'azione di S^1 su uno spazio vettoriale topologico E è più o meno un $\mathbb{Z}$-grading: infatti se $E(k)$ è il sottospazio chiuso di E su cui R_θ agisce come $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\theta}$ (lo **spazio di energia** k) allora la somma diretta algebrica

$$\check{E} = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} E(k)$$

è un sottospazio denso di E che chiameremo lo **spazio dei vettori di energia finita**. Diciamo che l'azione ha energia positiva se $E(k) = 0$ quando $k < 0$, o equivalentemente R_θ è rappresentato da $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}A\theta}$ con A operatore con spettro positivo.

Ora, le energie che compaiono in $H_{0,n}$ sono da 0 a $n-1$ mentre quelle che compaiono in $H_{-n,0}^*$ sono da 1 a n. La mappa sinistra induce un isomorfismo sugli spazi di energia k per $k < n$; ne segue che il limite proiettivo è semplicemente

$$\hat{\Lambda}(H_-^* \oplus H_+) = \prod_{k\geq 0} \Lambda(H_-^* \oplus H_+)(k)$$

come spazio vettoriale topologico. Solo energie positive compaiono, e ogni sottospazio a energia fissata è finito-dimensionale. Ora, abbiamo detto che

$$\varprojlim \Lambda(H_{-n,n}^*) \cong \hat{\Lambda}(H_-^* \oplus H_+)$$

Dimostriamo che $\Gamma(k) \cong \Lambda(H_-^* \oplus H_+)(k)$ per ogni k; a tale scopo basta far vedere che la mappa $\Gamma \to \Lambda(H_{-n,n}^*)$ è surgettiva per ogni n. Se vediamo $\Lambda(H_{-n,n}^*)$ come il duale di $\Lambda(H_{-n,n})$ allora ha base standard $\{\omega_\sigma\}$ indiciata dai sottoinsiemi di $\{-n, -n+1, \dots, n-1\}$ che è duale alla base $\{z^\sigma\}$ di $\Lambda(H_{-n,n})$ (qui $z^\sigma = z^{\sigma_1} \wedge \cdots \wedge z^{\sigma_p}$). Ora i sottoinsiemi σ corrispondono ai sottoinsiemi S di $\mathbb{Z}$ tali che $[n, \infty) \subseteq S \subseteq [-n, \infty)$. Per ogni S siffatto abbiamo la coordinata di Plücker Π_S che è un elemento di Γ che corrisponde a ω_σ.

Dall'affermazione precedente segue che $\Gamma \to \hat{\Lambda}(H_-^* \oplus H_+)$ è iniettiva e ha immagine densa; inoltre abbiamo anche dimostrato che le Π_S formano una base algebrica per il sottospazio denso $\check{\Gamma}$ formato dagli elementi di energia finita.

Si noti che se S è l'insieme ottenuto cancellando i naturali $a_1, \dots, a_p$ e inserendo i negativi $b_1, \dots, b_q$ allora $\Pi_S \in \Gamma$ corrisponde all'elemento di base $\bar{z}^{b_1} \wedge \cdots \wedge \bar{z}^{b_q} \wedge z^{a_1} \wedge \cdots \wedge z^{a_p}$ di $\Lambda(\bar{H}_- \oplus H_+)$ di energia $\ell^*(S) = \sum a_i - \sum b_i = |S| + \frac{1}{2}d(d+1)$ (dove $d = q - p = \operatorname{vcard} S$). Nell'interpretazione usuale, si tratta di uno stato a p particelle e q antiparticelle.

Sappiamo che la grassmanniana $\overline{\mathrm{Gr}}$ ha una famiglia infinita (indiciata da $d \in \mathbb{Z}$) di componenti connesse tutte isomorfe tra loro. Analogamente lo spazio Γ si può scrivere come

$$\Gamma = \prod_{d\in\mathbb{Z}} \Gamma_d$$

dove ciascun sottospazio Γ_d contiene gli "stati di carica $-d$",

$$\bigoplus_{q-p=d} \Lambda^q(\bar{H}_-) \otimes \Lambda^p(H_+)$$

Si può anche caratterizzare Γ_d come la parte di Γ su cui gli scalari $u \in U(1)$ agiscono per moltiplicazione per u^{-d}.

Sia ora Γ^* il duale di Γ, con la topologia della convergenza uniforme sui compatti. Definiamo un'applicazione lineare continua $\beta\colon \bar{\Gamma}^* \to \Gamma$ come segue. Basta dare una mappa olomorfa $\mathrm{Det} \to \bar{\Gamma}$ che è lineare su ogni fibra. Questo significa dare una mappa $\beta_0\colon \mathrm{Det} \times \mathrm{Det} \to \mathbb{C}$ che sia olomorfa nella seconda variabile e antiolomorfa nella prima, e lineare e antilineare nelle rispettive fibre. Definiamo

$$\beta_0(w, \tilde{w}) = \det\langle w_i, \tilde{w}_j\rangle$$

dove w e $\tilde{w}$ sono basi ammissibili per spazi in $\overline{\mathrm{Gr}}$ della medesima dimensione virtuale (e zero altrimenti). Questo ha senso perchè la matrice $\langle w_i, \tilde{w}_j\rangle$ ha determinante. Inoltre $\beta_0(\tilde{w}, w) = \overline{\beta_0(w, \tilde{w})}$ e quindi il pairing (continuo)

$$\langle \cdot, \cdot \rangle\colon \Gamma^* \times \bar{\Gamma}^* \to \mathbb{C}$$

definito da $\langle \xi, \eta\rangle = \xi(\beta(\eta))$, è hermitiano.

Ancora, per ogni $S \in \mathscr{S}$ abbiamo H_S con la sua base canonica; la valutazione delle sezioni di Det^* in z^S ci da un elemento di Γ^* o $\bar{\Gamma}^*$, che denotiamo ancora z^S. Per definizione $\beta(z^S)$ è la coordinata di Plücker Π_S; d'altro canto $\Pi_S(z^{S'}) = 1$ se $S = S'$ e zero altrimenti, quindi $\{z^S\}_{S\in\mathscr{S}}$ è una famiglia ortonormale in $\bar{\Gamma}^*$. Ma sappiamo che le coordinate di Plücker sono una base per il sottospazio denso $\check{\Gamma}$, ne segue che β induce un isomorfismo $(\bar{\Gamma}^*)\check{} \to \check{\Gamma}$ e che il pairing precedente è definito positivo. Allora $\bar{\Gamma}^*$ è un pre-spazio di Hilbert; sia $\mathcal{H}$ il suo completamento. Esso può essere identificato con un sottospazio dell'antiduale di $\bar{\Gamma}^*$, cioè Γ. Abbiamo così che

$$\bar{\Gamma}^* \to \mathcal{H} \to \Gamma$$

dove entrambe le iniezioni sono continue e la loro composizione è β. Ne segue che le coordinate di Plücker formano una base ortonormale per $\mathcal{H}$ sottospazio denso di Γ, come preannunciato; tale spazio è il completamento di $\Lambda(\bar{H}_- \oplus H_+)$.

Abbiamo visto che Γ si può scrivere come prodotto diretto di sottospazi Γ_d; ciascun Γ_d è una rappresentazione della componente connessa all'identità di $\widetilde{\mathrm{GL}}_{\mathrm{res}}(H)$, mentre gli elementi della k-esima componente di tale gruppo mandano Γ_d in Γ_{d+k}. Mostriamo adesso che Γ_0 può essere identificato con il completamento di un'algebra simmetrica.

Il gruppo $L\mathbb{C}^*$ agisce su H per moltiplicazione; consideriamo il suo sottogruppo Γ_-. Consideriamo l'orbita di $H_+ \in \overline{\mathrm{Gr}}$ sotto l'azione di Γ_-; i punti di quest'orbita non intersecano H_- (che è invariante), quindi si proiettano isomorficamente su H_+. La restrizione di Det sull'orbita può essere banalizzata canonicamente identificando $\mathrm{Det}(W)$ con $\mathrm{Det}(H_+)$ tramite questa proiezione. Allora le sezioni olomorfe di Det^* si restringono a ordinarie funzioni olomorfe su Γ_-, cioè c'è una mappa di restrizione $\Gamma_0 \to \mathscr{O}(\Gamma_-)$. Notiamo che l'anello $R := \mathbb{C}[h_i]$ è contenuto in $\mathscr{O}(\Gamma_-)$ come sottospazio denso, cioè come sottospazio degli elementi di energia finita.

Proposizione 85. Le coordinate di Plücker per $S \in \mathcal{S}$ si restringono alla funzione di Schur $s_{\lambda(S)}$ su R.

Ne segue che la mappa di restrizione $\Gamma_0 \to \mathscr{O}(\Gamma_-)$ è iniettiva e ha immagine densa; essa induce un isomorfismo $\check{\Gamma}_0 \to R$ tra i sottospazi formati dagli elementi di energia finita.

Sia A l'algebra di Lie di Γ_+ e $\bar{A}$ l'algebra di Lie di Γ_-. La mappa esponenziale $\bar{A} \to \Gamma_-$ è un isomorfismo olomorfo e quindi $\mathscr{O}(\Gamma_-)$ si può identificare con $\mathscr{O}(\bar{A})$.

Consideriamo ora la struttura unitaria. Sappiamo che lo spazio di Hilbert $\mathcal{H}_0 \subseteq \Gamma_0$ è isomorfo al completamento di R rispetto al prodotto interno definito precedentemente. Questo è esattamente il prodotto dell'algebra simmetrica $S(A) \subseteq \mathscr{O}(\bar{A})$ dove A ha il suo prodotto naturale

$$\langle \xi, \eta \rangle = -2\mathrm{i}S(\bar{\xi}, \eta) \tag{154}$$

infatti se definiamo le funzioni coordinate p_k su $\bar{A}$ scrivendo il generico $\eta \in \bar{A}$ come

$$\eta = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} p_k z^{-k}$$

allora $\{k^{-1/2}p_k\}$ è la base di $\bar{A}^*$ duale alla base $\{k^{-1/2}z^{-k}\}$ di $\bar{A}$. Quest'ultima è ortonormale per la forma (154) e quindi lo è la prima, e

$$\langle p_k, p_m \rangle = k\delta_{km}$$

dunque

Proposizione 86. $\mathcal{H}_0$ può essere identificato canonicamente con il completamento a spazio di Hilbert dell'algebra simmetrica $S(A)$ con il prodotto interno (154).

Possiamo anche vedere $\mathcal{H}_0$ come lo spazio delle funzioni olomorfe su un opportuno completamento di $\bar{A}$ a quadrato integrabile rispetto alla misura gaussiana naturale. Un simile completamento è il duale A^*, che è lo spazio delle applicazioni olomorfe

$$\eta\colon \{\, z \mid |z| > 1 \,\} \to \mathbb{C}$$

la cui restrizione al bordo S^1 è una distribuzione e tali che $\eta(\infty) = 0$.

Abbiamo così stabilito un isomorfismo di spazi di Hilbert

$$\bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} \hat{S}(A)_{(d)} \cong \hat{\Lambda}(\bar{H}_- \oplus H_+)$$

dove $\hat{S}(A)_{(d)}$ è la copia di $\hat{S}(A)$ che corrisponde alla d-esima componente connessa della grassmanniana.

§5. Celle e funzioni di Schur. Questo materiale è preso da [Wil98].

Proposizione 87. Sia dato $x = (X, Y, v, w) \in \tilde{C}_n$ e $W = \beta(x)$; allora $W \in \mathrm{Gr}_0$ se e solo se Y è nilpotente.

Denotiamo con C_n^0 il sottospazio di C_n rappresentato da quadruple (X, Y, v, w) in cui Y è nilpotente. Allora Gr_0 si decompone nell'unione disgiunta dei sottoinsiemi $\beta(C_n^0)$ per $n \geq 0$. Il significato di questa decomposizione è dato dalla seguente:

Proposizione 88. L'immagine di C_n^0 sotto β è l'unione di tutte le celle aperte n-dimensionali di Gr_0.

Ricordiamo che le celle n-dimensionali sono etichettate dalle partizioni di n nella solita maniera.

Ne segue che C_n^0 si spezza nell'unione disgiunta di celle n-dimensionali indiciate dalle partizioni di n; sarebbe interessante dare una parametrizzazione esplicita di queste celle e una formula per l'azione di β.

Supponiamo che W appartenga alla cella indiciata da S, allora per $\lambda \to \infty$ $R_\lambda(W)$ tende allo spazio H_S; ne segue che i "centri" delle celle sono proprio i punti fissi dell'azione di scaling, e la cella che corrisponde a S è caratterizzata come l'insieme dei punti di Gr_0 che fluiscono in H_S per $\lambda \to \infty$.

La funzione di Baker stazionaria di $R_\lambda(W)$ è $\psi_W(\lambda x, \lambda^{-1} z)$ quindi l'azione di $\mathbb{C}^*$ su C_n^0 corrispondente sotto β non è altro che

$$R_\lambda(X, Y) = (\lambda^{-1} X, \lambda Y)$$

su $\bar{C}_n^0$. Per trovare le celle basta guardare ai punti fissi di tale azione (sullo spazio quoziente).

Supponiamo che Y sia in forma normale di Jordan. Nel seguito scriviamo $X = \sum X_k$ per indicare la scomposizione di X in somma di matrici con entrate non nulle solo sulla k-esima diagonale. Y è in forma di Jordan se e solo se $Y = Y_1$. La coniugazione per la matrice $\mathrm{diag}(1, \lambda, \ldots, \lambda^{n-1})$ moltiplica la k-esima diagonale per λ^{-k}; seguendo R_λ con questa coniugazione vediamo che sulla parte di $\bar{C}_n^0$ che è in forma di Jordan la trasformazione di scaling coincide con la trasformazione Q_λ definita da

$$Q_\lambda(X, Y) = (\sum \lambda^{-k-1} X_k, Y) \tag{155}$$

In particolare la forma di Jordan di Y è la stessa in tutti i punti della cella. Consideriamo anzitutto il caso più semplice quando $Y = \Lambda_n$ (uni sulla prima diagonale e zero altrove).

Proposizione 89. Sia $(X, \Lambda_n) \in \bar{C}_n^0$. Allora:
1) le diagonali X_k per $k < -1$ sono nulle;
2) $[X_{-1}, \Lambda_n] + 1$ è una matrice diagonale di rango 1.

Ora, le matrici diagonali di rango 1 e traccia n sono semplicemente le matrici $nE_{r,r}$ con $1 \leq r \leq n$. Per ogni r c'è un'unica matrice $X(n, r)$ con elementi non nulli solo sulla diagonale -1 e tale che $[X(n, r), \Lambda_n] + 1 = nE_{r,r}$; gli elementi non nulli di tale matrice (leggendo dal posto $(2, 1)$ in giù) sono 1, 2, ..., $r - 1$, $-(n - r)$, ..., -2, -1. Queste sono dunque le sole possibilità per X_{-1}, e dalla (155) si ha allora che $Q_\lambda(X, \Lambda_n) \to (X_1, \Lambda_n)$ per $\lambda \to \infty$. Se ne conclude che:

Proposizione 90. La parte di C_n^0 rappresentata da coppie (X, Y) tali che Y ha un singolo blocco di Jordan è l'unione disgiunta di n celle $A(n, r)$ per $1 \leq r \leq n$; il centro della cella $A(n, r)$ corrisponde alla coppia $(X(n, r), \Lambda_n)$ sopra descritta.

Consideriamo ora il caso generale in cui Y è la somma di blocchi di Jordan Λ_{n_i}, che possiamo supporre disposti in ordine decrescente di grandezza ($n_i \geq n_j$ per $i < j$). Scriviamo $X = (X_{ij})$ per tale decomposizione, e scriviamo v_i e w_i per l'analoga decomposizione dei due vettori. Prendendo il blocco (i, i) nell'equazione di C_n si ha

$$[X_{ii}, \Lambda_{n_i}] + 1 = v_i w_i$$

quindi per ogni i la coppia (X_{ii}, Λ_{n_i}) definisce un punto nello spazio $C_{n_i}^0$, quindi abbiamo l'intero r_i introdotto sopra che etichetta la cella di $C_{n_i}^0$ che contiene questo punto.

Proposizione 91. Se $i < j$ allora $r_i > r_j$ e $n_i - r_i > n_j - r_j$.

Denotiamo con $A(n, r)$ la parte di C_n^0 che corrisponde a una collezione fissata di numeri n_i e r_i come sopra.

Proposizione 92. $A(n, r)$ forma una singola cella n-dimensionale in C_n^0; il centro della cella è rappresentato dalla coppia $(X(n, r), \oplus\Lambda_{n_i})$ dove $X(n, r)$ è la matrice composta da un blocco diagonale X_{ii} che è la matrice $X(n_i, r_i)$ descritta in precedenza, e per $i \neq j$ il blocco X_{ij} è l'unica matrice $n_i \times n_j$ che ha elementi non nulli solo sulla diagonale numero $r_j - r_i - 1$ e tale che

$$X_{ij}\Lambda_{n_j} - \Lambda_{n_i}X_{ij} = n_i E_{r_i, r_j}$$

L'esistenza e l'unicità di X_{ij} è una conseguenza del lemma precedente. È facile dare una descrizione concreta: se $i > j$ la diagonale non zero di X_{ij} ha r_i elementi uguali a n_i seguiti da $n_i - r_i$ elementi nulli; se $i < j$ la diagonale non nulla di X_{ij} ha $r_j - 1$ elementi nulli seguiti da $n_j - r_j + 1$ elementi uguali a $-n_i$.

Per completare la descrizione determiniamo quale cella di Gr_0 è l'immagine di ciascuna $A(n, r)$. Notiamo che l'insieme dei numeri (n_i, r_i) che soddisfano le restrizioni sopra esposte è in corrispondenza bigettiva con le partizioni (tramite la notazione di Frobenius): se a una coppia (n, r) associamo il diagramma di una partizione a un gancio $(n-r+1, 1^{r-1})$ allora basta piazzare i diagrammi delle partizioni a un gancio determinate da (n_i, r_i) uno dentro l'altro. Viceversa ogni partizione si può ottenere così. Denotiamo $\nu(n, r)$ la partizione associata a (n_i, r_i).

Proposizione 93. β manda $A(n, r)$ nella cella di Gr_0 indiciata dalla partizione $\nu(n, r)$.

Basta far vedere che β manda il centro di $A(n, r)$ nello spazio H_S associato a $\nu(n, r)$. La funzione tau di H_S è la funzione di Schur associata a $\nu(n, r)$, quindi se (X, Y) è la coppia di matrici descritta in precedenza deve essere

$$\det(X - \sum_i p_i(-Y)^{i-1}) \propto s_{\nu(n,r)}$$

Nel caso di una partizione a una riga (o una colonna): formula determinantale. Nel caso di una partizione a un gancio di nuovo c'è una formula in [Mac95]:

$$(a+b+1)a!b!s_{(a|b)} = \det \begin{pmatrix} p_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 \\ p_2 & p_1 & c_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ p_{a+b} & & \ddots & \ddots & c_{a+b} \\ p_{a+b+1} & p_{a+b} & \dots & p_2 & p_1 \end{pmatrix}$$

dove $(c_1, \dots, c_{a+b}) = (-1, -2, \dots, -a, b, b-1, \dots, 1)$. Questo si vede usando la relazione

$$s_{(a|b)} + s_{(a+1|b-1)} = h_{a+1}e_b$$

che si dimostra per induzione su b.

Riferimenti bibliografici

[GH78] P. Griffiths and J. Harris. *Principles of Algebraic Geometry.* Wiley-Interscience, 1978.

[Kas95] Alex Kasman. Bispectral KP solutions and linearization of Calogero-Moser particle system. *Commun. Math. Phys.*, 172:427–448, 1995.

[KvdL03] V. G. Kac and J. W. van de Leur. The n-component KP hierarchy and representation theory. *J. Math. Phys.*, 44:3245–3293, 2003.

[Mac95] Ian G. Macdonald. *Symmetric Functions and Hall Polynomials.* Oxford University Press, 2nd edition, 1995.

[PS86] Andrew Pressley and Graeme Segal. *Loop groups.* Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1986. Oxford Science Publications.

[Shi86] Takahiro Shiota. Characterization of Jacobian varieties in terms of soliton equations. *Invent. Math.*, 83:333–382, 1986.

[SW85] Graeme Segal and George Wilson. Loop groups and equations of KdV type. *Publ. Math. I.H.E.S.*, 61:5–65, 1985.

[Tat68] John Tate. Residues of differentials on curves. *Annales scientifiques de l'É.N.S.*, 1(1):149–159, 1968.

[Wil93] George Wilson. Bispectral commutative ordinary differential operators. *J. reine angew. Math.*, 442:177–204, 1993.

[Wil98] George Wilson. Collisions of Calogero-Moser particles and an adelic Grassmannian. *Invent. Math.*, 133:1–41, 1998.